BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink. del.
Söcklor. sc. 1779.

Ph. Math. 2322. f.

Math Un 108

Matthesii. Systemata & methodi 149.

R

Metaphysik

der

Größenkunde.

Ein Buch zum Nachlesen

von

Karl August Limmer,

Verfasser des Lehrbuchs der Rechenkunde.

Königsberg,

bey Fr. Nicolovius in Kommission.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Meiner Vaterstadt

Plauen

im Churſächſiſchen Voigtlande.

Sie, jetzige Hochzuverehrende Väter,
— und Sie, Hochgeschäzte Bürger der Stadt, in der ich geboren und erzogen wurde; Sie, unter deren Augen ich meine erste Bildung erhielt, oder mit denen ich, als meinen Gespielen, meine frühsten Jugendjahre verlebte, nehmen Sie das Opfer günstig an, welches ein dankbarer Sohn der Stadt, die ihn erzog, vom fernen Norden aus, unter den frömsten Wünschen für Ihr aller Wohl, hin zum Altar des Vaterlandes bringet.

Schrieb es an seine liebe Vaterstadt aus Schujenpahlen bey Wolmar in Livland

Schujenpahlen,
im Monat Januar 1803.

Karl August Limmer.

Metaphysik

der

Größenkunde

erster Band.

Allgemeine philosophische Untersuchungen über das Wesen der Größe überhaupt, und über die abstracte Größenkunde insbesondere.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Vorrede.

Auch zu diesem Werke gab wiederum, wie zu meinen beiden erstern Schriften, eine mir anvertraute Privatschule die nächste Veranlassung. Seinem Titel gemäß, soll es das seyn, zu was es mir im Manuscripte bey meinem Unterricht diente, den ich einem gewissen hoffnungsvollen Jünglinge, neben andern Wissenschaften auch besonders in der Mathematik zu ertheilen hatte; nemlich, nicht soll es ein Lehrbuch der reinen Mathematik selbst seyn, sondern nur ein Nachlesebuch über solche, und es ist also nicht für angehende Schüler in dieser Wissenschaft bestimmt, indem es schon die ersten mathematischen Kenntnisse voraussetzt; sondern mehr für solche, denen daran gelegen ist, durch eigenes Nachdenken und Lesen noch mehr und tiefer den wahren philosophischen Grund ihrer erlernten Wissenschaft zu erforschen. Mehr als für den Lernenden, möchte es sonach zum Gebrauch des Lehrers selbst seyn, um seinem Zögling bey dem ersten mathematischen Unterricht sogleich bessere Begriffe von den Gegenständen dieses Wißbaren beyzubringen, als die sind, welche man in den zeitherigen mathematischen Kompendien und mündlichen Vorträgen zu geben gewohnt ist.

Gerne stimme ich dem bey, was man als allgemein zugegeben annimmt: daß das Studium der Mathematik eine Schärfung des Verstandes, und für diesen eine intuitive Logik sey. Ja! ich bin so sehr dieser Meinung, daß, wenn ich nicht tausend Vorgänger schon darinnen hätte, ich es wagen würde, solche als der erste zu behaupten. Allein, einen nachdenkenden Blick in die vom Vater Euclides an bis jetzt existirenden Kompendien der so genannten reinen Mathematik, worauf doch alles mathematisch Wißbare gebauet seyn muß, und auf die in solchen beobachtete so hoch gepriesene Form in Aufstellung ihrer Lehren und deren Beweise, gethan; so sollte man fast nicht anstehen, den Spötteleyen eines Sextus, oder den Sticheleyen des Philosophen von Sanssouci über die Mathematiker beyzupflichten, und sich zu überreden: daß die Mathematik in ihrer Lehrform fast mehr zur Tödtung des Genies, als zu dessen Schärfung erfunden worden sey. Eine gewagte Behauptung! — Aber, was soll man sich wohl von einer Wissenschaft denken, die seit Jahrtausenden uns noch nicht einmal einen logischen Begriff von ihrem Gegenstand angeben kann, sondern immer noch Größe und Stiefelknecht, als ein wahres logisches Unding zu einem und demselben macht; — die noch kein Prinzip für die Anwendung ihrer Dogmen kennt; — und für die Güte ihres Vortrags und ihrer Beweise keinen andern Maaßstab hat, als die von ihrem

angenommenen Euclides eingeführte Form, nach welcher alle ihre Lehrbücher zugeschnitten, und wie Waisenkinder, oder Soldaten eines Regiments gleich ausstaffirt sind. Sollte man da nicht glauben, daß sie noch von keinem in ihren Grundkenntnissen müsse untersucht worden seyn, und daß sie auf jugendliche Talente den nemlichen nachtheiligen Einfluß haben müsse, den die Erfahrung ausgezeigt hat, welchen ein überhäuftes Sprachlernen auf das Genie hat, daß sie gleich diesem solchem nur eine einseitige Richtung giebt.

Wie die bisherige Mathematik in ihrem theoretischen Theil, in der Arithmetik, uns noch nicht einmal die wahren philosophischen Begriffe von der Größe und deren Modificationen aufzustellen hat; eben so wenig kennt sie in der Geometrie, in der allgemeinen Anwendung ihrer, ein Prinzipium für solche; und sie kann daher in der Form, wie wir sie erlernen, und wie sie in allen bis jetzt existirenden Kompendien vorgetragen ist, keinesweges eine Wissenschaft heissen, sondern sie giebt in ihrem theoretischen Theil nur ein Erlerntes, und in ihrem praktischen nur eine Kunstsache. Daher denn auch bey genauer Untersuchung die mehrsten ihrer in der Form aufgestellten Beweise nur angeben, daß eine Sache so und so ist; nicht aber, wie es doch die Natur wissenschaftlichen Wissens erheischet: wodurch, und warum die Sache so seyn soll und muß. Im dunkeln

Selbstgefühl dieser behaupteten Wahrheiten sprechen daher selbst Mathematiker von Profession von ihrem Wissen, als wie von Kunstsachen; wie denn Herr Bürja in seinem Algebraisten stets sich ausdrückt: die Regel de Tri u. s. w. ist die Kunst u. s. f.

Erweist sich aber die Mathematik in der bisherigen Form ihrer Lehrart im Grunde mehr nur wie eine Gedächtniß- und Kunstsache; so kann sie keinesweges den Vortheil für die Bildung des höhern Seelenvermögens gewähren, den man sich zeither von ihr versprochen hat, sondern ich getraue mich vielmehr dagegen zu behaupten: daß sie mehr Nachtheil als Nutzen bewürken müsse.

Der hieroglyphische Ton, welchen von jeher die Mathematiker in ihren Schriften und Vorträgen, als ihrer Wissenschaft nothwendig seyend haben glaubend gemacht, und welchen man besonders seit etwa funfzig Jahren bis so weit affektirt hat, daß man sich jetzt allgemein überzeugt hält, daß ein mathematisches Lehrbuch um desto gelehrter und gründlicher in einer je dunklern und unverständlichern Methode es verfasset sey, — diese ganz falsche Methode hat den Nachtheil, daß sie eines Theils die meisten von der Erforschung der so höchst wichtigen Wahrheiten dieses wissenschaftlichen Zweiges zurückscheucht; und ferner den sich ihr widmenden Genies auferlegt, von der frühesten Jugend an ihrer Erlernung ausschließlich ihre Zeit und Kräfte zu widmen, wodurch denn am Ende die Denk-

kraft nur eine einseitige Richtung erhält, und in allem, was nicht eine mathematische Formel ist, sich in einem fremden Felde befindet. Eben diese hieroglyphische Kunstformeln, und nicht die eigentlichen mathematischen Wahrheiten selbst, sind es, die dem angenommenen Glauben gemäß, die Mathematik zu der schwersten Wissenschaft gemacht, die so nöthig seyende Allgemeinheit ihres Studiums verringert, und für ihre Kenner, und bey diesen selbst den vorurtheiligen Wahn erzeugt haben, daß sie als besonders scharfsichtige Menschen vor andern, in dem Besitz der schwersten und daher höchsten Wissenschaft wären, da sie doch im Grunde nur im Besitz schwerer Formeln sind. Nicht wollen wir hier noch rügen, mit wie vielen für das Leben ganz unnützen Spekulationen, gleich der alten scholastischen Philosophie, die bisherige Mathematik überhäuft ist, und noch immer überladen wird, welche sich bis jetzt unter dem heiligen Dunkel ihrer Formeln, und dem erborgten Palladium, daß sie alleine nur untrügliche Wahrheiten lehre, ungerügt erhalten haben, weil die mehrsten von ihren Zauberkarakteren abgeschreckt sich vor ihrer Erlernung scheuen, und die in ihren Geheimnissen Eingeweihten, über ihr mühsames Formellernen, so wie die alten Sprachgelehrten, gleichsam scheinen zu dem Beurtheilen solcher selbst unaufgelegt zu seyn. Laßt uns die Mathematik von ihrem hieroglyphischen Formelton, und ihren unnützen scholastischen Spitzfin-

digkeiten reinigen, und sie in einer menschlichen Sprache lehren, — und sie wird uns nicht schwerer als eine jede andere Wissenschaft erscheinen.

Die Mathematik auf den ihr gebührenden Rang einer Wissenschaft zu erheben, sie so als eine intuitive Logik wahrhaft brauchbar für die Bildung und Schärfung des jugendlichen Verstandes zu machen, und Anleitung zu geben, wie sie in einer menschlichen Sprache gelehrt werden möge, um ihr dadurch die Allgemeinheit zu verschaffen, die sie wegen ihrer Unentbehrlichkeit für einen jeden würklich haben sollte, war daher der Zweck dieser meiner Schrift.

Soll in der Mathematik aber diese höchstnöthige Reform bewürkt werden, so müssen wir uns vor das erste, mit den ersten Gründen und mit den Prinzipien der Dinge, die hier Gegenstände unserer forschenden Erkenntniß sind, beschäftigen, und daher der Titel dieses Buches; denn das will der doppelsinnige Name Metaphysik sagen. Es soll also unser Buch eigentlich eine Einleitung in die gesammte sogenannte reine Mathematik, als den Grund von allem mathematisch Wißbaren, seyn. Die Metaphysik der Größenkunde soll also blos eine Wissenschaft der Beurtheilung der reinen und allgemein angewandten Mathematik, ihres Gegenstandes, und dessen Modifikationen und deren Anwendung, mithin eine Propädevtik zu einem System der reinen und allgemein angewandten

Mathematik, und ihr Nutzen in Ansehung der Spekulation würklich nur negativ seyn, d. i. nicht zur Erweiterung, sondern nur zur Erläuterung und Berichtigung ihrer dienen. Man erwarte demnach hier keinesweges eine völlig ausgearbeitete Arithmetik und Geometrie. Hier ist es uns nur um die Prinzipien und die philosophischen Gründe dieser Wissenschaft zu thun, um sie in ihrem völligen Umfange einzusehen.

Nach dem allgemeinen Begriff des Wortes Metaphysik, ist uns also die Metaphysik der Größenkunde: die wissenschaftliche Betrachtung des Wesens und Grundes der Größe, ihrer Benennungen und Modifikationen, wie auch der vorzüglichsten Gegenstände an denen wir sie betrachten; und so zerfällt sie an sich selbst in zween Hauptabschnitte.

Der erste Hauptabschnitt nemlich, welcher der Vorwurf dieses ersten Bandes ist, beschäftigt sich mit der wissenschaftlichen Beurtheilung der abstrakten Größenkenntniß. Welches Neue hierüber in diesem Bande alles gesagt worden sey, verlange man hier nicht hererzählt; denn dieses hieße nichts anders heischen, als daß ich fast das ganze Buch hier wiederum ausschreiben sollte.

Gegenstand des zweeten Bandes soll die wissenschaftliche Beurtheilung der konkreten Größenkenntniß werden. Hier wird für die Geometrie, als der allgemein angewandten Mathematik, das Principium aufgestellt, aus welchem

sich denn nun durch logische Schlüsse alle deren Lehrsätze und Forderungen folgern, und als nothwendige Folgen erhärten lassen. Hierdurch überreden wir uns, der Geometrie nicht nur ein wissenschaftliches Ansehen zu geben; sondern auch vermögend zu werden, ihre Lehren in dem leichtesten und faßlichsten Lichte, in der Sprache des gemeinen Lebens aufstellen zu können. Ein Beyspiel möge hiervon seyn.

Nachdem nemlich der Kreis, als dieses Prinzipium der Geometrie, als die absolute Form für die wissenschaftliche Beurtheilung der Beschaffenheit jeder zusammengesetzten Ausdehnung erhärtet; so folgt daraus, daß der Begriff des Winkels kein anderer, als: Abweichung von der absoluten Form für Ausdehnung, seyn könne; der nun von der Größe der Grade seiner Abweichung seine verschiedenen Benennungen erhält. Giebt nun jeder rechte Winkel, als eine Abweichung von 90° in seinen beiden Schenkeln nothwendig zwo Sehnen des Kreises, deren Verhältniß = 90° . 2; so nehmen solche in ihrer Form also die Hälfte des ihnen zugehörigen Kreises weg, von dem der Winkel sich als Abweichung charakterisiret. Diese beiden Sehnen mit einer dritten geschlossen, giebt also nothwendig die Sehne für die noch übrige Hälfte dieses Kreises; also: die Hypothenuse jedes rechtwinklichten Dreyecks ist nothwendig der Diameter des Kreises von dem sich dieses Dreyeck als eine abweichende

Form charakterisirt, und dessen beide Katheten geben zusammen nun nur zwo Sehnen, die gleich sind dem Verhalten der einen Hälfte des Kreises zur Hypothenuse, wie die andere Hälfte des Kreises zu dieser, als seinem Diameter. Verhalten sich denn nun weiter — wie schon voraus an seinem Orte erwiesen seyn muß — Sehnen, wie ihre um sie beschriebene Bogen, und Quadrate wiederum wie ihre Grundflächen; so muß denn nun nothwendig das Quadrat der Hypothenuse gleich seyn denen der beiden Katheten, denn das Verhältniß letzterer beiden ist gleich dem Verhältniß der Hypothenuse im Verhalten als Sehnen zu dem Kreise, von welchem sich durch diese das rechtwinklichte Dreyeck als eine Abweichung charakterisirt. — Ich glaube, dieser Endbeweis — der hier nur als ein zusammengezogener summarisch aufgestellt ist — für den Pythagoräischen Lehrsatz, wird leichter und faßlicher seyn, als die bisher aufgestellten Kunstbeweise für solchen. — Er ist aber nicht in der Form! — ja, aber eben diese Form selbst ist es, die wir uns überredet haben, mit Grunde bey Seite setzen zu müssen.

Daß ich mich in diesem Bande unter der Anführung L. d. R. Lehrbuch der Rechenkunde, auf dieses mein eigenes 1797 bey Steffenhagen zu Mitau herausgegebenes Werk berufe, wird man mir nicht als eine Eitelkeit auslegen wollen, in Erwägung der Beurtheilung, welcher es der gelehrte und biedere B.

— den ich mit einem P. ja nicht etwa zu verwechseln bitte — in der Mitauischen Zeitung vom Jahr 1797 No. 13. öffentlich gewürdiget hat, und ich auch noch gesonnen bin, den damals öffentlich von dem edlen B. gewünschten zweiten Band, der die höhere Arithmetik enthalten soll, zu jenem Werke zu schreiben: und zwar soll diese nun nach den in dieser Metaphysik aufgestellten Erheischungen ausgearbeitet erscheinen.

Endlich muß ich noch bitten, sich zu überzeugen, daß ich nicht in dem Eigendünkel lebe, dieses mein Buch etwa fehlerfrey und für unverbesserlich zu halten. Aber, durch Fallen lernen wir gehen; und man wird bedenken, daß ich der erste bin, der es wagte, die Mathematik mit diesem, meiner Ueberzeugung nach, ihr so nothwendigem Theile, zu vermehren. Da ich also diese Bahn, ohne einen Vorgänger zu haben, mir selbst habe schaffen müssen; so glaube ich mit noch mehrerm Fug berechtigt zu seyn, daß man auf mich anwende, was Herder im Allgmeinen von der Aufstellung einer Metaphysik saget: „Die ersten Gründe und Prinzipien der Dinge aufzustellen, ist doch wahrlich nichts leichtes.“

Der Verfasser,
privatisirender Gelehrter.

Summarischer Inhalt des ersten Bandes.

Erster Theil.

Allgemeine Grundsätze vom Wesen und der Erkenntniß der Größe überhaupt.

Absch. I. Allgemeiner Begriff der Größe; von dem Wesen und der Eintheilung solcher, und deren wissenschaftlichen Betrachtung. 1 —

Absch. II. Insbesondere von der hypothetischen Größe, deren Erkenntniß und Angabe. 49 —

Zweeter Theil.

Allgemeine Gesetze für hypothetische Größe. 72 —

Absch. I. Gesetze und Ausdrücke für die Entstehung einer hypothetischen Größe. 75 —

Abſch. II. Allgemeine Geſetze und Ausdrücke für die Größe ſelbſt. 101 —

Abſch. III. Allgemeine Geſetze für Größenmodificationen. 114

Zweeten Theiles Abſchnitt III. Kap. I.

Allgemeine Modificationsgeſetze für eigenthümliche Größen. 115 — 168.

Addition 115 —

Subtraction 125 —

(Weſen und Entſtehung entgegengeſetzter Größen. 132 — 135. 137)

(Nächſte Größen. 144 — 148)

(Von graden und ungraden Zahlen 148 — 150)

(Modificationsgeſetze für entgegengeſetzte Größen, in eigenthümlichen Größenausdrücken. 150 — 153)

Grundgeſetze für die Gleichungsrechnung mit Stammgleichungen. 154 — 166.

Zweeten Theiles Abſchnitt III. Kap. II.

Allgemeine Modificationsgeſetze, der Verhältnißgrößen. 169 —

Von den Verhältniſſen (Raisons) überhaupt. 169 —

Multiplication 184 —

Dimenſion 195 —

(Dimenſion iſt keine Diviſion 198 — 200)

(Von gebrochenen Größen 211 — 227)
(Wesen und Modificationsgesetze von Verhältnißgleichungen 234 — 240)
Von zusammengesetzten Verhältnissen; dem Kleinern der Verhältnisse und der Brüche 240 — 251.
Von den Proportionen 253 — 259
Vergleichungen (Rapports) und Vergleichungsproportionen 259 — 277
(Von multiplizirten Verhältnissen 278)
(Verhältnißmäßige Modificationen entgegengesetzter Größen. 279 — 282)
Progressionen 283 —
(Erfindung der dritten Proportionalgröße. 286)
Vergleichungsprogressionen. 289 —
(Erfindung einer dritten Vergleichungsgröße. 292)
Gradationen und Degradationen. 297 —
(Anm. zu den multiplizirten Verhältnissen. 310)
(Vergleichungsgradationen und Degradationen 313 — 320)
(Allgemeine Gesetze für jede Zahlenschrift, besonders nach den Gesetzen der Dekadik, und den Brüchen nach solchen. 321 — 332.)
(Erfindungsgesetze für Urgrößen. 332 — 343)
(Arithmetisches Verfahren mit Gradationen und Urgrößen. 343 —)
(Entgegengesetzte Größen als Gradations- und Degradationsausdrücke. 354 — 359)

(Arithmetisches Verfahren mit Dezimalbrüchen. 359 — 365.)
(Erfindung mittlerer Proportionalen und Vergleichungsgrößen. 366)
Exponentiation 368 —
(Erfindung der Logarithmen 375)
(Bestimmung der Brüchen zugehörigen Logarithmen 399)
(Erfindung der einem Log. eines bestimmten Systems zugehörigen Zahl. 411)
(Verfahren mit Logarithmen 422)
Saltation und Desaltation 433 —
Logarithmische Proportionen und Progressionen 436 —
Höhere Gleichungen 439 —

Erster Theil.

Allgemeine Grundsätze vom Wesen und der Erkenntniß der Größe überhaupt.

Abschnitt I.

Allgemeiner Begriff der Größe; von dem Wesen und der Eintheilung solcher, und deren wissenschaftlichen Betrachtung.

Alles, was uns umgiebt, und was unsere tägliche Erfahrungen außer uns als Würklichkeiten beobachten, sind entweder Phänomene von Selbstständigkeiten, die wir mit dem allgemeinen Namen Körper belegen; oder von solchen hervorgebrachte und dargestellte Veränderungen, die wir Würkungen nennen.

Wir empfinden, d. h. wir werden uns nach der Einrichtung unserer organischen Natur gewisser Eindrücke äusserer Gegenstände auf uns bewußt; wir werden es uns durch gewisse Eindrücke, welche die Dinge auser uns, sowohl durch sich selbst, als durch die Veränderungen, die sie in ihren Eindrücken auf unsere Organe machen, bewußt, daß gewisse Phänomene auser uns sind, und dies nennen wir das **Empfinden** solcher. Dieses ist die erste Würkung unserer Kraft, welche wir freylich auch mit dem Thiere gemein haben, und uns hierin nur durch das mehr oder minder lebhaft und deutlich seyn, wie wir uns solcher Eindrücke bewust werden, von solchem unterscheiden, über solches erheben, oft aber auch wohl unter diesem stehen.

b. Bey der Empfindung handelt also blos der organische, der thierische Theil unserer Natur, welcher eben, nach der Einrichtung dieser, immer zuerst handelt; denn nur erst vom Empfinden können wir zum Denken, zum Handeln des geistigen Theils unserer Natur übergehen, nachdem uns erst jene die Materialien dazu geliefert hat. Denn, bleiben wir nun nicht blos bey den gehabten einzelnen Empfindungen stehen, sondern vergleichen wir solche unter einander, unterscheiden wir nun ähnliche, gleiche und verschiedene gehabte Eindrücke, bemerken uns an ihnen gewisse Merkmale, durch die wir sie von einander sowohl unterscheiden, als auch an denen wir

sie immer als schon gehabte Eindrücke wieder erkennen können; so sagt man nun, daß wir denken. — Eine zwote Aeusserung unserer Kraft, die aber noch immer zu genau mit unsern Organen zusammenhängt, als daß wir hierin den Unterschied unserer von der thierischen Natur setzen dürften; denn auch hierin besteht aller Unterschied von dem Thiere nur in dem höhern Grade der Deutlichkeit, wie sich unser Bewustwerden die Bilder, — Vorstellungen, Begriffe — solcher empfundenen Phänomene malt und bildet, und in dem mehrern oder mindern Grade, wie uns die Wiederholung, das Erinnern unsers Bewustseyns, — unser Gedächtniß — solche nach einer gewissen Zwischenzeit wiederum zurückruft, oder vergegenwärtiget.

c. Gehen wir aber hier noch einen Schritt weiter; daß wir aus den gebildeten Begriffen solcher Phänomene das Wesen derselben bestimmen und hieraus nun weiter Gesetze und Regeln für ihre Erscheinung, für sich selbst nicht nur, sondern auch in Vergleichung, im Zusammenhange mit andern, unter verschiedene Modificationen gestellt, abstrahiren; so ist diese Handlung unserer Natur nun das **Nachdenken** (Raisonnement) über solche, welches nach allen Erfahrungen nur dem Menschen eigen ist, und dessen erhabenen Vorzug vor dem Thiere bestimmt.

* Abstrahiren wir endlich von allen einzelnen Erfahrungen und Begriffen, so daß wir blos bey dem Wesen der Dinge, bey den ersten und einfachen Begriffen stehen bleiben, und von diesen uns zu allgemeinen Begriffen erheben, und nun aus den ersten und allgemeinen Begriffen der Dinge das zusammengesetzte und besondere bestimmen, und so allgemeine Gesetze für die einzelnen und zusammengesetzten Erscheinungen festsetzen, so also, daß wir die Gegenstände und deren Modificationen nicht mehr aus unmittelbarer Empfindung, sondern lediglich aus uns selbst, aus Begriffen entwickeln; so heist dieses: daß wir über die Dinge philosophiren, welches das höhere Nachdenken, und zugleich die höchste Stufe ist, auf welche sich unsere Kraft zu schwingen vermag, und wobey blos der geistige Theil unserer Natur in Thätigkeit ist. Da man nun diese Form der Entwickelung unserer Begriffe, wenn man das zusammengesetzte aus dem einfachen, das besondere aus dem allgemeinen ableitet und folgert, Wissenschaft nennt; so ist also die Philosophie: das wissenschaftliche Nachdenken; (raisonnement savant) und über einen Gegenstand philosophiren heißt demnach: wissenschaftlich über solchen nachdenken.

d. Alles unser Wissen ist demnach; entweder das Resultat unmittelbarer Empfindungen, oder Abstraction von solchen, Resultat des Nachdenkens; und alle unsere Begriffe unterscheiden sich daher in intuitive und rationelle.

e. Wir müssen also erst empfunden und gedacht haben, bevor wir fähig sind über Gegenstände nachzudenken. Können wir nun erhärten, daß die Resultate unsers Denkens und Nachdenkens den Gegenständen entsprechen, so wie solche in der

Natur, wie sie in der That sind; so haben wir die Wahrheit gefunden. Die Erhärtungsgründe für die Wahrheit unserer Empfindungen und Nachdenkensresultate können aber ohnmöglich ins unendliche gehen, weil dann nie eine einzige Wahrheit für uns je existiren könnte, sondern sie müssen sich irgend aus einem ersten Grundsatze unserer Erkenntniß ableiten, und zu solchem zurückführen lassen, — auf einen solchen Satz, der jedem gesunden Verstande für sich klar, und keines weitern Beweises bedürftig ist, und diesen ersten Satz aller menschlichen Erkenntniß, den Probierstein alles dessen, was für ihn Wahrheit werden kann, finden wir in dem sogenannten Satze des Widerspruchs, nach welchem es nicht möglich ist: daß etwas zugleich sey und auch nicht sey. Hier bey diesem Satz fühlen wir uns nothwendig gedrungen mit jeder Wahrheitserhärtung stehen zu bleiben, er ist die uns gezogene Barriere, über die wir mit unserm Denken nicht weiter hinauszugehen vermögen.

f. Geben wir nun auf den Gang unserer Vorstellungen, — Begriffe — von Dingen und Veränderungen acht; so finden wir, daß der erste und höchste Begriff den wir fassen können, der des Denkbaren sey. Dieser Begriff umfaßt den ganzen Kreis unserer Ideen, und ist die Stufe auf welcher der Thor und der Weise brü-

derlich neben einander stehen, da jedes Vorstellungen, so absurd oder wahr sie auch seyn mögen, ihm denkbar sind. Wir können aber ohne irgend eine gehabte Empfindung, keine Vorstellung, keinen Begrif uns bilden, nichts kann uns also denkbar seyn, das sich nicht auf irgend eine gehabte Empfindung reduziren ließe; denkbar ist uns daher alles das nur, dessen erste Ursprünge sich von irgend einer gehabten, wenn auch noch zu weit entfernten sinnlichen Empfindung, richtig oder unrichtig concipirten, herleiten läßt, wo dieses nicht ist, da denken wir gar nicht, giebt es für uns kein Denkbares.

g. Vergleichen wir weiter das Denkbare mit sich selbst, oder mit andern gehabten Empfindungen; so faßt sein Seyn entweder einen Widerspruch, oder nicht, und da haben wir im erstern Falle ein Unmögliches, ein Nichts gedacht; im letztern dagegen erhalten wir Möglichkeit, denn möglich ist uns: dessen Denkbarkeit entweder an sich, oder in Vergleichung keinen Widerspruch fasset.

h. Die uns als möglich erscheinende Vorstellungen sind deswegen aber noch nicht würklich, — noch nicht in der That existirend; kommt aber zu dem als möglich gedachten noch die positive Bestimmung, daß es uns unsere Erfahrungen, oder eine

aus solchen abstrahirte nothwendige Schlußfolge der allgemeinen Denkform, als ein Etwas in der Natur vorhandenes, das da Veränderungen hervorzubringen, oder aufzunehmen fähig sey, kennen lehren, dann haben wir **Würklichkeit**, (ens, existens aliquod) welche, nach dem ersten Begriffe menschlicher Erkenntniß, mit der Möglichkeit dies gemein haben muß, daß, so wie das Mögliche in einem Absein alles Widerspruches besteht, dieses sich in seinen Veränderungen nicht widersprechen darf; daher man nothwendig von der Würklichkeit auch jedesmal auf die Möglichkeit muß schließen können, ob dieses gleich umgekehrt nicht der Fall ist.

i. Bey jedem Denkbaren müssen wir, wenn unsere Vorstellungen nicht ein Nichts umfassen, oder schwankend und ungewiß seyn sollen, uns dasjenige genau denken, wodurch sich das Gedachte von allen andern unterscheidet, und grade dasjenige ist, was es ist, und seyn soll; eben so also auch bey dem blos als möglich gedachten, und dem als würklich empfundenen. Dieses Etwas nun, auf das wir unsere Aufmerksamkeit hierbey richten müssen, welches macht, daß das Gedachte und Empfundene grade dasjenige wird, was es ist und seyn soll, nennen wir dessen **Wesen**.

* Das Wesen ist also der Inbegriff des Wie eines Etwas, es ist dasjenige bey jedem Etwas, welches das wie es (denk-

bar, möglich, würklich) ist, in sich fasset; und der Ausdruck für dieses Wie, welcher uns das Wesen von einem Etwas angiebt, heißt der Grund von solchem, so wie wiederum die Anführung des Grundes der Beweis heißt. Der Grund ist also das Wodurch von einem Etwas, das uns als denkbar, möglich, oder würklich erscheint; er führt uns auf das Wesen, oder das Wie, durch welches etwas ist. Daher, führen wir von einer Sache den Beweis ihrer, d. h. führen wir den Grund ihrer — das Wodurch sie ist, an; so sehen wir, daß wir hier nicht weiter als bis zu ihrem Wesen, als dem ersten bey ihr anzunehmenden, als zu dem Etwas, was den ganzen Grund ihrer in sich enthält, gehen können, wenn wir anders nicht gegen den Satz des Widerspruchs verstoßen wollen. Streng metaphysisch genommen, ist also der Satz unrichtig: daß alles seinen zureichenden Grund haben müsse; — da das, was das Wesen einer Sache ausmacht, weiter keinen zureichenden Grund seiner wiederum zulassen kann, eben weil es das erste bey jeder Sache anzunehmende ist, dasjenige ist, was den ganzen Grund der Sache in sich enthält. Dergleichen Wahrheiten aber, die das Wesen der Sache zugleich selbst in sich begreifen, und sonach keinen weitern Grund ihrer haben können, also keinen weitern Beweis ihrer gestatten, nennt man erste Grundwahrheiten — Axiome.

NB. Der Grund ist zureichend, wenn er allein schon das ganze Wesen einer Sache zeigt, thut er dieses nicht alleine, kann man noch ein weiteres Warum — Wodurch bey ihm anbringen, so ist er ein unzureichender.

Der Grund einer Sache kann mehrere Theile in sich fassen, dann steht er dem Axiom entgegen, und heißt ein zusammengesetzter, dessen Theile sich alsdann sub- oder coordinirt sind.

Der Grund wird Sach- und Erkenntnißgrund, welche beide in der Mathematik fast meistens eins sind.

Was den Grund von etwas in sich enthält, heißt der Erkenntnißgrund, das Principium.

k. Bleiben wir nun bey (S. h.) dem Würklichen stehen; so hat dieses entweder sein eigenes Wesen, oder nicht, d. i. der Grund welcher macht, daß etwas würklich ist, — Veränderungen hervorbringt, oder aufnimmt — liegt entweder in ihm selbst, oder nicht. Im erstern Fall benennen wir das Würkliche welches sein eigenes Wesen hat, eine **Sache, ein Ding**; — ens, existens — im andern, heißt es eine **Würkung**, — eine Würklichkeit, die als solche von einer andern Würklichkeit dargestellt worden und abhängt. Jedes Existirende also muß würklich seyn, d. h. Veränderungen hervorbringen, oder aufnehmen.

* Adequater ist dem philosophischen Begriff S. h. das deutsche Wort Würklichkeit, von würken, d. i. Veränderungen darstellen, als die lat. Benennung ens, und existens hier gebraucht; hingegen für den Ausdruck der philosophischen Idee einer Sache, eines Dinges, S. k. sind wiederum die lat. Benennungen ens, existens adequater als diese Ausdrücke unserer deutschen Sprache, und daher würde es vielleicht besser seyn, wenn wir für Sache, Ding, lieber die Ausdrücke — ein Existirendes, — ein Seyendes — annähmen.

l. Das Existirende (Sache, Ding) ist entweder blos in unserer Vorstellung würklich, als Tugend, Laster ꝛc. und da behält es den allgemeinen Namen des Geschlechts; oder es ist ausser unserer Vor-

stellung auch in der That würklich, und wenn dieses, so heißt es ausgezeichnet eine Selbstständigkeit, — Subsistenz, ὑπόστασις — der Karacter der Selbstständigkeit ist also: daß sie als ein in der That Würkliches Veränderungen schaffen oder aufnehmen könne, in der That unmittelbar von sich selbst: dieses Vermögen aber nennen wir eine Kraft, und weil da, wo Würklichkeit ist, auch das sie schaffende, d. i. die solche darstellende Kraft seyn muß; so bezeichnen daher die Ausdrücke Kraft und Selbstständigkeit einerley, und Selbstständigkeit und Kraft sind also eines und dasselbe; oder, nur die Kraft ist die einzige wahre Selbstständigkeit.

m. Sind nun Kraft und Subsistenz eines und dasselbe, und ist Kraft, alles das was den Grund einer Würklichkeit in sich enthält; so kann die Kraft (Subsistenz) selbst nicht etwa wiederum mehrere materielle Bestandtheile, aus denen sie etwa zusammengesetzt wäre, in sich fassen; denn sonst müßte es widersprechend ins unendliche wiederum Kräfte von Kräften geben, sondern sie ist nothwendig in ihrem Wesen einfach, und liegt daher ausser dem Kreise der uns möglich werdenden Empfindungen, und macht es uns also ohnmöglich von ihr eine Definition zu geben. Nicht die Kräfte, die Selbstständigkeiten selbst kennen wir, sondern nur erst ihre Phänomene, und nur

erst aus dieser Wahrnehmung gelingt es uns auf die Selbstständigkeiten selbst zu schließen, welche diese Phänomene hervorbringen.

* Die Kräfte, (Substanzen) sind sonach das eigentliche Wesen aller Phänomene, daher können wir bey der Erklärung letzterer, bey der Aufsuchung des Wodurch irgend eines Phänomens nicht weiter als bis zu den es darstellenden Kräften gehen, weil diese als der erste Grund von jedem Phänomen keinen weitern Grund zulassen können. (S. i. *).

** Wenn wir sagen die Substanz ist einfach; so involvirt dieses den Begriff, eines alle Zusammensetzung ausschließenden, deswegen kann und muß sie aber immer doch als Kraft verschiedene Bestimmungen ihrer in sich fassen, und ist also von Einfachheit, dem Abseyn von aller Mehrheit der Bestimmungen, wohl zu unterscheiden. Die Substanz ist, und muß einfach seyn, nicht aber findet in ihr Einfachheit statt.

n. Alle die Dinge nun, die uns umgeben, von deren Daseyn wir uns durch die Empfindung belehren, und Begriffe bilden können, sind zusammengesetzte, ihrer Natur nach theil- und trennbare Dinge; also nicht Selbstständigkeiten selbst, sondern nur Dinge, die den Grund ihres Daseyns erst in etwas andern haben müssen, welches uns nicht empfindbar ist. Da wir aber das, was den Grund von irgend etwas in sich enthält, dessen Kraft — Substanz — Selbstständigkeit — nennen; so sind mithin alle diese Dinge nicht Selbstständigkeiten selbst, sondern nur Phänomene von diesen.

* Diese haben daher auch alle ihren Grund, müssen solchen haben, weil sie nicht einfache sondern zusammengesetzte, — dem einfachen entgegengesetzte, von diesem abgeleitete Wesen sind, und sie finden diesen ihren sie gebenden Grund in den sie bildenden Kräften (S. i. *).

o. Die Substanz existirt entweder blos für sich alleine, und dann benennen wir sie mit diesem allgemeinen Namen; oder sie existirt in Verbindung mit andern, homogenen oder heterogenen Substanzen, und schafft so in dieser Verbindung neue, in der That existirende zusammengesetzte Würklichkeiten, in welchem letztern Falle wir sie die Monaden, — Dynamen, — Kräfte, auch die Elemente der zusammengesetzten Dinge im eigentlichern Sinne nennen, und von letztern werden wir in Zukunft hier eigentlich nur reden, da erstere allein Gegenstand der eigentlichen Metaphysic sind.

p. Diese in der That existirende zusammengesetzte Würklichkeiten aus der Verbindung mehrerer Dynamen, werden nun als Phänomene solcher empfindbar, und wir unterscheiden hier wiederum: entweder die in der That existirende Phänomene dieser Dynamen Verbindungen selbsten, oder die durch diese Kraftverbindungen dargestellte Veränderungen und Folgen. Erstere nennen wir Körper, letztere Würkungen. In wie fern nun der Körper ein Phänomen von verbundenen

Selbstständigkeiten ist, sagen wir also daher: daß alles unsern Sinnen empfindbare entweder Phänomene der Selbstständigkeit, oder von solchem dargestellte Würkung sey.

Satz 2. An beiden, Selbstständigkeitsphänomenen sowohl, als Würkungen unterscheiden wir nun nicht nur das **Wie** und **Wodurch**, d. i. Wesen und Grund ihrer Existenz; sondern auch das **Welchergestalt** und das **Wieviele** ihrer Würklichkeit, d. h. ihre Eigenschaften und Größe. — Die Qualität und Quantität derselben.

Inwieferne man Sache und Ausdruck ihrer für eines annehmen kann, sind auch das Wesen und der Grund, das **Wie** und **Wodurch** irgend eines Phänomens für eines, und zwar nach S. 1. i. * für das erste bey jedem Würklichen zu setzen. Von dem Wesen der Phänomene ist hierbey zu angef. O. noch anzumerken: daß solches entweder einfach ist, (S. 1. m. **) oder, wenn sich in ihm einzelne Theile unterscheiden lassen, solche die **wesentlichen Stücke** desselben heißen, deren Inbegrif dann das ganze Wesen des Phänomens, den zusammengesetzten Grund desselben ausmachen.

b. Noch aber lassen sich bey jedem Phänomen, es sey Körper, oder Würkung, ausser dem **Wie** und **Wodurch**, noch zwo Fragen aufwerfen,

nemlich: Welchergestalt das Phänomen, — und Wieviel von solchem sey? — und nur erst die Berichtigung aller dieser vier Fragen, giebt uns einen richtig determinirten Begrif von der Sache. Denn die Erforschung des Wie und Wodurch, des Wesens und Grundes, giebt uns erst einen allgemeinen Begrif, welcher wohl richtig, aber noch nicht determinirt ist, soll er dieses seyn; so müssen wir auch noch an der Sache auffuchen welchergestalt und wieviel sie sey, d. i. wir müssen die Sache bestimmen. Die Bestimmungen einer Sache sind also wieder der Inbegrif des Welchergestalt und des Wieviel ihrer.

c. Alle Bestimmungen aber, sehen wir also, characterisiren sich, daß sie der Sache, von der sie gesagt werden, noch ausser ihrem Wesen und wesentlichen Stücken zukommen.

d. Diese Bestimmungen sind wesentliche oder innere, wenn sie so mit dem Wesen der Sache selbst verbunden sind, daß ihr Abseyn auch das Daseyn der Sache selbst aufhebet; im Gegentheil sind sie nur äußere oder zufällige Bestimmungen.

e. Bestimmungen, die nicht nur von einer Sache, sondern auch von einer andern Bestimmung selbst wiederum gesagt werden, heißen in dieser Rücksicht Unter- oder Nebenbestimmungen.

f. Alle Bestimmungen einer Sache drücken nun entweder aus, welchergestalt die Sache sey, oder wieviel von derselben vorhanden, und so unterscheidet man sie in Eigenschaften und Größen, (Qualitäten und Quantitäten). Eigenschaft ist also der Inbegrif des Welchergestalt einer Sache; und Größe ist der Inbegrif, die Bestimmung des Wievielen einer Sache. — Beide sind also Bestimmungen der Dinge, und unterscheiden sich nur als verschiedene Namen für verschiedene Bestimmungen.

g. Das Wieviele kann aber bey einer jeden Sache, nicht nur von dieser selbst, sondern auch von deren Eigenschaft gefragt werden. Denn wenn überhaupt genommen die Eigenschaft, die Bestimmung des Wie oder Welcherley (Qualitatis phaenomeni alicujus) begreift, und daher auch die Beschaffenheit, Qualität — qualitas — einer Sache heißet; so ist die Größe — Quantitas — wiederum auch Nebenbestimmung der Eigenschaft (S. 2. e.) nemlich die Bestimmung des Wievielen — quanti — von diesem Wie, diesem Welcherley. Hierin also das Wesen des Unterschiedes zwischen Eigenschaft (Beschaffenheit) und Größe einer Sache, id quod facit discrimen inter qualitatem et quantitatem phaenomeni alicujus. Involvit quantitas, *quantum* qualitatis. Eigenschaft und Größe ver-

halten sich sonach zu einander, wie Subject und Prädicat.

Satz 3. Aus dem Begrif der Eigenschaft ergiebt sich nun, daß eine und die nemliche Sache deren mehrere begreifen könne, da nach S. 1. m. ** selbst die einfache Kraft mehrere Bestimmungen welchergestalt sie würklich in sich fassen kann. Eine allgemeine wesentliche Eigenschaft aber, welche wir an allen zusammengesetzten Würklichen, theils durch unmittelbare, theils mittelbare Empfindung entdecken, ist die Eigenschaft der Ausdehnung, welche wir daher in eine würkliche und ideale unterscheiden.

Wenn wir, wie angenommen, blos bey den Gegenständen sinnlicher Empfindungen stehen bleiben, so sind diese nach S. 1. blos Körper und Würkungen solcher. Körper sind die Subjecte unserer anschaulichen Erkenntnisse, und Würkungen die empfindbaren Prädicate derselben.

b. Die Resultate unsers Nachdenkens nun über die sinnlich erworbene Kenntniß von einem Körper, lehren uns diesen nach S. 1. p. als ein Phänomen von gewissen in einer ungetrennten Verbindung mit einander stehenden Selbstständigkeiten kennen, welche Selbstständigkeiten wir in dieser Verbindung, dessen ihn bildende Monaden, —

Dynamen, — Kräfte oder Elemente nennen; daher denn der metaphysisch allgemeine Begrif eines Körpers, daß er sey: — ein Selbstständigkeit habendes aus unendlichen homogenen, oder heterogenen Kräften zusammengesetztes in der That Existirendes.

* Nicht ist also der Körper selbst eine Selbstständigkeit, wohl aber hat er Selbstständigkeit, in wiefern er nemlich eine Zusammensetzung von Selbstständigkeiten ist, und in dieser Rücksicht muß er seine Würklichkeit in der That haben, weil darin das Wesen der in dieser Zusammensetzung ihn bildenden Dynamen bestehet.

NB. Unendlich soll hier das nicht zu bestimmende involviren.

c. Hat nun nach ihrem Begrif nothwendig jede einzelne von den unendlichen Dynamen, welche einen Körper in ihrer Verbindung bilden, ihre eigene Würklichkeit in der That für sich; so können diese Dynamen in dieser Verbindung nothwendig nicht in einander, sondern es muß eine jede auser der andern, und zwar um dieses Phänomen zu bilden, neben der andern und mit ihr in Verbindung existiren; und dieses in Verbindung Nebeneinanderbestehen dieser, einen Körper bildenden Dynamen, führt uns auf den Begrif der körperlichen Ausdehnung, welche, wenn wir unter dem Ausdruck seiner unendlichen Theile, die den Körper bildende Dynamen begreifen, ist: das

verbundene Nebeneinanderbestehen der unendlichen den Körper bildenden Theile.

d. Die Ausdehnung ist sonach die erste Eigenschaft, welche wir als eine allgemeine an einem jeden Körper entdecken, und zwar ist sie eine wesentliche Eigenschaft jedes Körpers, denn, sie ist nicht nur der Ausdruck des Welchergestalt diese Dynamen den Körper bilden, sondern es ist auch nach dem Wesen eines Körpers (b.) ohnmöglich, sich deren einen ohne diese Eigenschaft zu denken.

e. Der Begrif der Ausdehnung, als der von dem eines Körpers unzertrennliche, involvirt zugleich die Idee von Zusammenhang, Verknüpfung oder Verbindung zu einem, welche bestehet: in der Unzertrenntheit zweyer wenigstens, oder mehrerer Dinge, wovon die Bestimmung des einen immer in dem andern so liegt, daß es nicht möglich ist, je zwischen zween ein drittes anzunehmen.

f. Die den Körper und dessen Ausdehnung bildende Dynamen, müssen also nebeneinander existiren, aber nothwendig im Zusammenhange, Verbindung oder Verknüpfung, so daß immer die Bestimmung der einen in der andern so liegt, daß ein dazwischen anzunehmendes drittes ohnmöglich ist. Weil hier aber der Gegenstand eine Zusammensetzung von Kräften betrift, die also

als solche nicht blos im Zusammenhange neben-einander sind, blos ununterbrochen zusammenge-setzt sind, sondern die in diesem Zusammenhange auch so als Kräfte auf und gegen einander wür-ken, sich wechselseitig so einander bestimmen, daß dadurch ein neues selbstständiges Phänomen, (der Körper nemlich) hervorgebracht wird; so bezeich-net man alle diese Ideen durch den Ausdruck Ko-häsion, und man sagt: die den Körper bildende Dynamen cohäriren, — stehen unter sich in Kohäsion. — Der vollkommene metaphysische Begrif eines Körpers ist daher „das Phäno-men cohäricender Dynamen.

g. **Zusammenhang, Verknüpfung, Verbindung** sind also wiederum innere Nebenbestimmung der Ausdehnung. Denn nur eine ununterbrochene Aus-dehnung, eine solche, deren Theile alle in unmit-telbarem Zusammenhange, in Verknüpfung mit einander stehen, ist eine wahre Ausdehnung, an-ders ist sie dieses nicht, sondern eine Zerstreuung, Zerstückelung ihrer Theile, so wenn man sagte: das Regiment dehnte sich auf seinem Marsch über zehn Meilen aus, man traf nemlich alle Werste eine Korporälschaft desselben an.

h. An jedem Körper entdecken wir also durch unmit-telbare Empfindung in der That würklich die Ei-genschaft der Ausdehnung, und zwar als eine

wesentliche in der That würkliche derselben. Aber auch die von diesen Kraftphänomenen dargestellten Veränderungen, — Würkungen — haben, und müssen ihre Ausdehnung haben, in wiefern sie uns nach ihrem Begriff S. 1. als von vorhandenen Kräften dargestellte Würklichkeiten empfindbar werden. Denn sollen sie uns dieses werden, da nur das Zusammengesetzte uns empfindbar seyn kann, so muß auch bey ihnen eine gewisse ununterbrochene Fortsetzung ihrer Würklichkeit entweder statt finden; oder wir müssen an ihnen ein Mehr oder Minder der auf sie verwandten Kraftverwendung in unserer Empfindung unterscheiden können, und diese empfundene ununterbrochene Fortsetzung ihrer Würklichkeit; oder das Mehr oder Minder empfundene der auf sie verwandten Kraft, giebt uns auch bey Würkungen eine statthabende Ausdehnung ihrer an, daher ganz richtig der allgemeine Sprachgebrauch sich ausdrückt: die Folgen, die Würkungen der und der Sache erstreckten sich bis dahin.

1. Wir können aber diese Eigenschaft der Ausdehnung bey Würkungen, nicht aus unmittelbaren Empfindungen, wie bey Körpern, sondern nur erst aus mittelbaren, aus Vergleichung mit andern Empfindungen vindiziren.

Die Fortsetzung ihrer aus Vergleichung mit dem Lauf der Gestirne, und der daher ab strahir

ten Idee von der Zeit, in Vergleichung mit der Fortsetzung anderer empfundenen Würkungen, ebenfalls mit der Zeit verglichen, giebt uns also eine Idee, von einem ununterbrochen Fortgesetzten, d. i. von einer Ausdehnung ihrer in dieser Rücksicht.

Oder, wir vergleichen das empfundene einer Würkung, mit andern ähnlichen gehabten Empfindungen, und unterscheiden nun hier aus dieser Vergleichung wiederum das Mehr oder Minder, das wir in Vergleichung bey dieser Würkung, in der Art und Weise solcher empfinden; so giebt uns dieses ebenfalls die Idee eines Verbundenen, Zusammengesetzten, d. i. einer Ausdehnung dieser Würkung.

k. Würkungen haben also ebenfalls ihre Ausdehnung, welche für uns aber nur ein aus Vergleichung, aus mittelbaren Empfindungen überkommener, nur in unsern Ideen, nicht aber für uns in der That existirender Begrif ist; und sonach haben für uns Würkungen nur eine ideelle Ausdehnung: daher man denn Ausdehnung überhaupt in **würkliche** und **ideelle** unterscheidet, wovon erstere wesentliche Eigenschaft der Körper, letztere der Würkungen ist.

l. Das Resultat aus h. i. und k. ist demnach dieses: Ideale Ausdehnung kann nur von Würkungen

gesagt werden, und besteht da entweder in der Würklichkeit, rücksichts der Dauer solcher, als die Zeit, S. 3. h., oder rücksichts des Wie derselben in der Aehnlichkeit S. i. wo wir im Grunde nur eine Zusammensetzung, ähnlich einer Ausdehnung empfinden, und nur durch ein Mehr oder Weniger in Vergleichung unterscheiden können.

Satz 4. So wie nun eine und die nemliche Sache wohl mehrere Eigenschaften begreifen kann; so finden wir aber dagegen; daß nothwendig jedes Würkliche nur Ein Wievieles seiner Art begreifen, d. i. nur Eine Größe haben könne; weil es widersprechend, daß eines und dasselbe auch zugleich ein anderes seyn könne.

Satz 5. Jedes Würkliche aber, muß seine ihm zukommende absolute Größe haben.

Denn, da Größe (S. 2. f.) weiter nichts als der Inbegriff, die Bestimmtheit für das Wieviele eines Etwas ist; so ist sie eine wesentliche Bestimmung eines jeden, auch blos denkbaren Etwas. Denn ohnmöglich ist es, auch nur ein Denkbares anzunehmen, ohne dabey auch ein Wievieles seiner Art zu denken, wenn man anders nicht einen Widerspruch denken wollte. Selbst die einfache Substanz muß sonach ein Wieviel ihrer zulassen, muß ihre Größe haben;

denn selbst bey der Betrachtung der Gottheit sind wir ja nothwendig gezwungen, zu fragen und uns zu denken: Wie viel sind Götter? —

Größe läßt sich also nicht nur von den Phänomenen der Körperwelt und deren Würkungen; sondern auch von den einfachen Substanzen und deren Würkungen selbst behaupten, wenn wir anders solche nicht zugleich als würklich und auch nicht würklich annehmen wollen.

Satz 6. Die Größe ist also nach ihrem Begriff eine wesentliche Bestimmung jedes Existirenden, und hat daher als solche kein selbstständiges Wesen. — Der Ausdruck für die Größe einer Sache heißt die Einheit, und, die Größe einer Sache angeben, heißt ihre Einheit angeben, angeben wie oft sie die Einheit enthalte. — Die Einheit aber unterscheidet sich wieder in eine absolute und hypothetische, wovon erstere nur die Bestimmung des Einfachen ist.

Wie wir S. 2. d. gesehen haben, daß sich die Bestimmungen einer Sache in wesentliche und zufällige unterscheiden, so characterisirt sich also nach S. 4 u. 5 die Größe als wesentliche Bestimmung jedes Existirenden; als solche aber kann sie, zu Folge S. 2. b. nicht selbst wiederum ein selbstständiges Wesen haben, und man kann sie also nie als eine Sache die ihre eigene Selbstständigkeit hätte, oder selbst eine Selbst-

ständigkeit wäre, betrachten, in diesen Fehler aber verfällt man, wenn man sie, wie bisher geschehen, und ich selbst noch in meinem L. d. R. gethan habe, definiren will, daß sie sey: alles das, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig. Denn, wenn gleich nach S. 5. jedes Existirende seine absolute Größe haben muß, so kann man ja aber deswegen noch nicht sagen, daß irgend ein Existirendes selbst eine Größe wäre. — Wohl aber faßt der Begriff der Größe, als der Inbegriff des Wievielen bey jedem Existirenden, abstract genommen, als denkbar die Idee in sich, daß dieses Wieviele vermehrt oder vermindert werden könne; dieses vermehrt oder vermindert werden können, erscheint sonach aber nur wiederum nach S. 2. e. als eine Unterbestimmung von der Größe eines Etwas, nicht aber als das Wesen der Größe selbst, und sonach sehen wir hier wiederum einen zweiten Grund, daß durch die angeführte bisher übliche Definition der Größe, nicht der wahre Begriff ihrer gegeben worden.

b. Wenn nun aber Größe der Inbegriff des Wievielen jedes Existirenden ist; so müssen wir doch in unsern Vorstellungen einen Ausdruck für solches haben, und wir finden diesen in der Einheit; daher, die Größe einer Sache angeben, weiter nichts heißt, als: ihre Einheit angeben; — angeben, wie oft sie die Einheit enthalte.

Hier fragt es sich also nun, was ist Einheit?

c. Einheit ist der Inbegriff der Ungetrenntheit irgend eines Etwas, und da, wo wir ein Etwas als ein Ungetrenntes finden, oder annehmen, haben wir die Einheit, — haben wir den Begriff des Eins, oder der Eins.

d. Diese Ungetrenntheit nun, deren Inbegriff die Einheit, ist, wie wir sehen, nicht selbst etwas Selbstständiges, sondern nur Bestimmung eines Etwas, von dem wir sie angeben, sie hat sonach auch kein selbstständiges Wesen, sondern erhält ihren Grund erst von dem Etwas, von dem sie angenommen wird, so wie die Größe (S. 6. a.) überhaupt, für welche sie als Ausdruck stehet. In dem Etwas selbst nun, können wir in der Ungetrenntheit seines Wesens, nach diesem, als möglich entweder mehrere wesentliche Stücke unterscheiden, oder nicht, und so haben wir im erstern Fall absolute, im zweiten, hypothetische Einheit.

e. Faßt es einen absoluten Widerspruch in sich, das Wesen eines Etwas als ein solches anzunehmen, das noch mehrere wesentliche Stücke in sich faßte, und wo dessen Einfachheit nur der Inbegriff aller dieser zu einem Ungetrennten verbundener wesentlicher Stücke wäre, so finden wir absolute Einheit. Diese nur können wir von den Kräften, oder Selbstständigkeiten behaup-

ten; da diese aber an sich selbst kein Gegenstand unserer unmittelbaren Empfindung sind, so ist also auch die absolute Einheit, oder die Größe, deren Ausdruck absolute Einheit ist, kein Gegenstand unserer Betrachtung.

f. Hingegen, finden wir, daß das Wesen eines Etwas mehrere wesentliche Stücke, entweder in der That, oder auch nur in unsern Ideen als möglich in sich faßt; so sind diese als solche für sich betrachtet einer Trennung fähig, denken wir sie uns aber als ungetrennt beysammen, so nennen wir ihre Ungetrenntheit auch die Einheit, und da wo man sich die verschiedenen wesentlichen Stücke als ungetrennt beysammen denkt, ist in unsern Vorstellungen ebenfalls Eins. Dies giebt aber nur eine hypothetische Einheit, — ein Etwas, das wir also nur erst in Beziehung Eins nennen. Denn, bevor wir hier in dem Wesen eines Etwas Eins nennen können, müssen wir vorher dessen wesentliche Stücke gedacht haben, die nun dann erst, wenn wir sie in einer Unzertrenntheit als das ganze Wesen des Etwas denken, eine Einheit formiren, und nun die Idee des Eins, oder der Eins geben.

Die hypothetische Einheit ist der Ausdruck der Größe von allem, von dem wir eine reelle oder ideelle Ausdehnung sagen, oder substituiren können. Da

nun diese nach §. 3. allgemeines Prädicat der Phänomene zusammengesetzter Kräfte und deren Würkungen ist, und nur diese Gegenstände unserer Betrachtungen seyn können; so kann auch nur die hypothetische Einheit, und die Größe, deren Ausdruck sie ist, Gegenstand unserer Betrachtung werden.

Satz 7. Je nachdem sich nun von Dingen absolute oder hypothetische Einheit sagen läßt, unterscheiden wir auch entweder ihre absolute oder hypothetische Größe. Läßt sich ein Existirendes nach seinem Wesen ganz und gar in keine Vergleichung und Zusammenstellung mit andern ihm ähnlichen und gleichen denken, so ist seine Größe eine nothwendig absolute, welche als solche ganz ausser aller Betrachtung liegt; Hingegen, ist das Wesen eines Existirenden von der Art, daß es ausser sich noch ihm ähnliche und gleiche hat, mit denen es sich vergleichen und zusammenstellen läßt, so erhält es hierdurch eine hypothetische Größe, und wird dann noch Gegenstand unserer Betrachtung, wie dieses überhaupt nur die hypothetische Größe allein seyn kann.

Wenn die Einheit der Ausdruck für das Wieviele, die Größe eines Etwas ist, so muß ihre wesentliche Verschiedenheit in absolute und hypothetische, auch

nothwendig eine wesentliche Verschiedenheit der Sache, für deren Ausdruck sie stehet, also eine wesentliche Verschiedenheit des Wievielen, der Größe bey einem Etwas erzeugen, daher wir also die Größe selbst wieder in eine absolute und hypothetische unterscheiden. Ein Unterschied, der aber nicht in ihr selbst liegt, da sie selbst kein selbstständiges Wesen hat, S. 6. a. sondern in den Dingen, denen sie als wesentliche Bestimmung zukommt.

b. Ist der Ausdruck für das Wieviele eines Etwas absolute Einheit, S. 6. e. so hat die Sache eine absolute Größe; so wie sie dagegen eine hypothetische Größe hat, wenn der Ausdruck für das Wieviele ihrer hypothetische Einheit faßt. S. 6. f. — Die absolute Größe ist wesentliche Bestimmung aller Selbstständigkeiten oder Kräfte, weil wir nach ihrem Wesen, S. 6. e. in ihrer Unzertrenntheit oder Einheit keine weitere zu Einem verbundene wesentliche Stücke unterscheiden können. Können wir nun aber da, wo wir auf diese absolute Einheit kommen, (welche deswegen aber doch immer noch ein Wievieles, und also eine Größe ausdrückt) nach dem Begriff ihrer, keine wesentliche Stücke in der Unzertrennntheit ihres Wesens unterscheiden; so muß nothwendig bey ihr auch als ohnmöglich nicht nur jede Verminderung sondern auch jede Vermehrung ihrer seyn, weil da wo absolute Einheit ist, es

ja nothwendig undenkbar ist, daß davon etwas weggenommen werden könne; eben so wie es dem Wesen der absoluten Einheit widersprechend, daß sie je eine Vermehrung ihrer zulassen könnte. Die absolute Größe muß also an sich ohne Vermehrung oder Verminderung gedacht werden, und wir sehen also hier wiederum: daß in Vermehrung oder Verminderung fähig seyn, nicht das Wesen der Größe bestehe, S. 6. a. und daher der bis jetzt gewöhnlich gegebene Begriff von der Größe, daß sie sey: alles, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig" keine Definition solcher seyn könne, weil sonst widersprechend gegen S. 5. u. 6. Dinge von denen sich nur absolute Größe behaupten läßt, also gar keine Größe haben könnten. — Wohl aber kann diese absolute Größe an sich genommen, kein Gegenstand unserer Betrachtung weiter seyn, da sie, S. 6. e. gleich den Dingen, denen sie zukommt, ausser der Sphäre unserer Erkenntniß liegt, woraus aber deswegen noch nicht geschlossen werden kann, daß sie selbst nichts würkliches wäre, denn sonst müßten ja auch die Selbstständigkeiten selbst nicht würklich seyn, weil wir nicht diese selbst, sondern nur erst ihre Phänomene percipiren können.

c. Wie aber die Größe überhaupt, als eine Bestimmung der Dinge, von diesen ihr Wesen er-

hält, S. 6. so unterscheidet sich auch wieder die absolute Größe selbst, in eine nothwendig und hypothetisch absolute, je nachdem das Wesen der Dinge selbst, dem sie zukommt, verschieden ist.

d. Ist das Wesen eines Etwas nicht anders denkbar, als daß es, nicht nur für sich betrachtet einfach seyn, und absolute Einheit umfassen muß, sondern daß auch ausser ihm kein zweites ihm ähnliches und gleiches existire, mit dem es verglichen und zusammengestellt werden könne, sondern daß es ohne alle gestattete Vergleichung immer nothwendig nur eins ist und bleibt; so faßt es nothwendig absolute Einheit, und hat sonach eine nothwendig absolute Größe, welche daher ganz ausser aller Betrachtung liegt, nie einer Bestimmung seiner Vielheit fähig werden kann, und den Begriff des eigentlichen, oder metaphysischen Unendlichen giebt, d. i. eines Vielen, daß nach seinem Wesen nothwendig absolut immer und in jeder Betrachtung unbestimmbar ist und bleibet. Als ein solches Wesen ist uns aber allein nur das Urwesen aller Dinge denkbar, daher auch von diesem nur allein nothwendig absolute Größe behauptet werden kann..

e. Ist aber das Wesen eines Etwas von der Art, daß es wohl an sich als ein einfaches, absolute Einheit habendes gedacht werden muß; ausser

ihm aber ähnliche und gleiche existiren, mit denen es sich vergleichen und zusammenstellen läßt, und so ein zweytes giebt; so ist seine Einheit eine hypothetisch-absolute, nemlich, die wohl in Rücksicht des Wesens des Dinges selbst absolut, aber von diesem abstrahirt, in Vergleichung und Zusammenstellung betrachtet, hypothetische Einheit geben, und also eine hypothetische Größe haben kann. So haben alle Substanzen oder Kräfte, ausser dem Urwesen, eine hypothetisch-absolute Einheit und Größe, denn wir betrachten sie in ihren gegebenen Phänomenen von Körpern und deren Würkungen, rücksichts ihrer Zusammensetzung und Vergleichung mit einander, als Dinge, die eine hypothetische Größe geben.

f. Was aber hypothetische Größe sey, ist uns schon aus S. 6. f. dem dort gegebenen Ausdruck ihrer, der hypothetischen Einheit bekannt, nach welchem sie also der Inbegriff des Wievielen eines Etwas ist, das sich durch eine hypothetische Einheit angeben läßt. Sie ist sonach, nach dem Wesen ihres sie gebenden Ausdrucks, wesentliche Bestimmung alles dessen, wo wir reelle Zusammensetzung und Ausdehnung erkennen, oder ideelle substituiren können; also nothwendige Bestimmung aller Körper-Phänomene, und der von solchen prätendirten Würkungen.

g. Doch, in wiefern man hypothetische Größe an sich eigentlich nicht von den Kräften, welche in ihrer Zusammensetzung die Körper-Phänomene bilden, oder die da würken, sagen kann, weil solche als einfache Wesen absolute Größe begreifen; sondern nur von der reellen oder ideellen Ausdehnung, welche diese Kräfte in ihrer Zusammensetzung zu Körpern und Würkungen geben, erscheint die hypothetische Größe zwar immer als wesentliche Bestimmung der Körper und Würkungen solcher, stets aber so, daß sie allemal als Bestimmung deren reellen oder ideellen Ausdehnung genommen werden muß, und also als eine **Nebenbestimmung** der Dinge erscheint. S. 2. e.

h. Wie nun aber zu Folge ihres Wesens (S. 3.) Ausdehnung für uns ein intuitiver Begrif ist; (S. 1. d.) so muß solches also auch deren Prädicat die hypothetische Größe seyn, und in wiefern wir nun von dieser, nach dem Gang unserer Erkenntnisse (S. 1.) allen unsern Begrif von Größe abstrahiren; so ist daher denn auch aller Begrif der Größe ein intuitiver, und wir können uns weiter von dem Wievielen eines Etwas keine Vorstellnng machen, wenn es nicht Gegenstand unserer anschaulichen Erkenntniß, unmittelbar oder mittelbarer ist; weswegen denn auch das absolute Wieviele, das sich nur durch absolute

hält, S. 6. so unterscheidet sich auch wieder die absolute Größe selbst, in eine nothwendig und hypothetisch absolute, je nachdem das Wesen der Dinge selbst, dem sie zukommt, verschieden ist.

d. Ist das Wesen eines Etwas nicht anders denkbar, als daß es, nicht nur für sich betrachtet einfach seyn, und absolute Einheit umfassen muß, sondern daß auch ausser ihm kein zweites ihm ähnliches und gleiches existire, mit dem es verglichen und zusammengestellt werden könne, sondern daß es ohne alle gestattete Vergleichung immer nothwendig nur eins ist und bleibt; so faßt es nothwendig absolute Einheit, und hat sonach eine nothwendig absolute Größe, welche daher ganz ausser aller Betrachtung liegt, nie einer Bestimmung seiner Wievielheit fähig werden kann, und den Begriff des eigentlichen, oder metaphysischen Unendlichen giebt, d. i. eines Wievielen, daß nach seinem Wesen nothwendig absolut immer und in jeder Betrachtung unbestimmbar ist und bleibet. Als ein solches Wesen ist uns aber allein nur das Urwesen aller Dinge denkbar, daher auch von diesem nur allein nothwendig absolute Größe behauptet werden kann..

e. Ist aber das Wesen eines Etwas von der Art, daß es wohl an sich als ein einfaches, absolute Einheit habendes gedacht werden muß; ausser

ihm aber ähnliche und gleiche existiren, mit denen es sich vergleichen und zusammenstellen läßt, und so ein zweytes giebt; so ist seine Einheit eine hypothetisch-absolute, nemlich, die wohl in Rücksicht des Wesens des Dinges selbst absolut, aber von diesem abstrahirt, in Vergleichung und Zusammenstellung betrachtet, hypothetische Einheit geben, und also eine hypothetische Größe haben kann. So haben alle Substanzen oder Kräfte, ausser dem Urwesen, eine hypothetisch-absolute Einheit und Größe, denn wir betrachten sie in ihren gegebenen Phänomenen von Körpern und deren Würkungen, rücksichts ihrer Zusammensetzung und Vergleichung mit einander, als Dinge, die eine hypothetische Größe geben.

f. Was aber hypothetische Größe sey, ist uns schon aus S. 6. f. dem dort gegebenen Ausdruck ihrer, der hypothetischen Einheit bekannt, nach welchem sie also der Inbegriff des Wievielen eines Etwas ist, das sich durch eine hypothetische Einheit angeben läßt. Sie ist sonach, nach dem Wesen ihres sie gebenden Ausdrucks, wesentliche Bestimmung alles dessen, wo wir reelle Zusammensetzung und Ausdehnung erkennen, oder ideelle substituiren können; also nothwendige Bestimmung aller Körper-Phänomene, und der von solchen prätendirten Würkungen.

g. Doch, in wiefern man hypothetische Größe an sich eigentlich nicht von den Kräften, welche in ihrer Zusammensetzung die Körper-Phänomene bilden, oder die da würken, sagen kann, weil solche als einfache Wesen absolute Größe begreifen; sondern nur von der reellen oder ideellen Ausdehnung, welche diese Kräfte in ihrer Zusammensetzung zu Körpern und Würkungen geben, erscheint die hypothetische Größe zwar immer als wesentliche Bestimmung der Körper und Würkungen solcher, stets aber so, daß sie allemal als Bestimmung deren reellen oder ideellen Ausdehnung genommen werden muß, und also **als eine Nebenbestimmung der Dinge** erscheint. S. 2. e.

h. Wie nun aber zu Folge ihres Wesens (S. 3.) Ausdehnung für uns ein intuitiver Begrif ist; (S. 1. d.) so muß solches also auch deren Prädicat die hypothetische Größe seyn, und in wiefern wir nun von dieser, nach dem Gang unserer Erkenntnisse (S. 1.) allen unsern Begrif von Größe abstrahiren; so ist daher denn auch aller Begrif der Größe ein intuitiver, und wir können uns weiter von dem Wievielen eines Etwas keine Vorstellnng machen, wenn es nicht Gegenstand unserer anschaulichen Erkenntniß, unmittelbar oder mittelbarer ist; weswegen denn auch das absolute Wieviele, das sich nur durch absolute

Einheit ausdrücken läßt, auſſer unſerer Erkenntniß und Betrachtungs-Sphäre.

Satz 8. Was man von der abſoluten Größe, S. 7. nicht behaupten konnte, daß ſie einer Vermehrung oder Verminderung fähig, wird dargegen weſentliche Beſtimmung der hypothetiſchen Größe. Die wiſſenſchaftliche Betrachtung nun der hypothetiſchen Größe und ihrer Modificationen, heißt Mathematik.

Wenn es dem Begriff der abſoluten Größe widerſprechend war, ſich eine Vermehrung oder Verminderung ihrer zu denken; ſo iſt es dagegen wiederum ohnmöglich, eine hypothetiſche Größe ohne dieſe Eigenſchaft anzunehmen, ſondern wir ſind dieſes gezwungen, wir mögen ſie nun abſtract genommen, oder als Prädicat der Ausdehnung, in Beziehung auf dieſe, ihr Subject betrachten, in beiden Fällen erſcheint Vermehrungs- oder Verminderungsfähigkeit als weſentliche Beſtimmung der hypothetiſchen Größe. Denn

a. betrachten wir ſie abſtract für ſich, nach dem Weſen ihres Begriffes, S. 7. f. als den Inbegriff des Wievielen eines Etwas, deſſen Ausdruck hypothetiſche Einheit iſt; ſo folgt daraus nothwendig nach S. 6. f. daß wir uns als mög-

lich, einmal: von der Zusammensetzung, die wir in ihrem Inbegriff Eins nennen, auch einiges davon weggenommen denken können; — so wie wir aber diese Verminderung möglich finden, eben so ist es zweitens dagegen auch denkbar: daß noch eine Vermehrung in dieser Zusammensetzung zu einer Einheit möglich sey.

b. Eben dieses erweiset sich auch, wenn wir sie zu Folge S. 2. g. als Prädicat der Zusammensetzung und Ausdehnung betrachten. Denn, da im Prädicate einer Sache nichts liegen darf, was dem Wesen seines Subjects widersprechend wäre; so muß nothwendig auch die hypothetische Größe, als wesentliches Prädicat der Ausdehnung, dieses ihres Subjects, die Bestimmung der Verminderungs- oder Vermehrungsfähigkeit haben, weil solche wesentliche Bestimmung der Ausdehnung, zu Folge ihres Begriffes S. 3. c. ist.

c. Characterisirt sich nun die hypothetische Größe als ein Wievieles, das, sowohl abstract für sich betrachtet, wie auch als Prädicat seines Subjects genommen, von dem es gesagt wird, einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist; so ist sie also in beider Rücksicht verschiedener Modificationen fähig, — und betrachten wir sie sowohl an sich, als ihre Modificationen, deren

lich, einmal: von der Zusammensetzung, die wir in ihrem Inbegriff Eins nennen, auch einiges davon weggenommen denken können; — so wie wir aber diese Verminderung möglich finden, eben so ist es zweitens dagegen auch denkbar: daß noch eine Vermehrung in dieser Zusammensetzung zu einer Einheit möglich sey.

b. Eben dieses erweiset sich auch, wenn wir sie zu Folge S. 2. g. als Prädicat der Zusammensetzung und Ausdehnung betrachten. Denn, da im Prädicate einer Sache nichts liegen darf, was dem Wesen seines Subjects widersprechend wäre; so muß nothwendig auch die hypothetische Größe, als wesentliches Prädicat der Ausdehnung, dieses ihres Subjects, die Bestimmung der Verminderungs- oder Vermehrungsfähigkeit haben, weil solche wesentliche Bestimmung der Ausdehnung, zu Folge ihres Begriffes S. 3. c. ist.

c. Characterisirt sich nun die hypothetische Größe als ein Wievieles, das, sowohl abstract für sich betrachtet, wie auch als Prädicat seines Subjects genommen, von dem es gesagt wird, einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist; so ist sie also in beider Rücksicht verschiedener Modificationen fähig, — und betrachten wir sie sowohl an sich, als ihre Modificationen, deren

Philosophie entwickelt ihre Gegenstände blos aus Begriffen, die Mathematik dargegen stellt die ihrigen anschaulich für die Sinne dar. Die Mathematik belehrt uns nicht wie die Philosophie discursiv, sondern sie verfährt intuitiv, nemlich, daß sie nicht wie die Philosophie aus Begriffen schließt, sondern vielmehr ihre Begriffe construirt, d. i. sie in der Anschauung darstellt, aber dies nicht in einer empirischen, sondern in einer Anschauung a priori, die unabhängig von aller Erfahrung. Die Philosophie kann nur aus der empirischen Wahrnehmung und a priori durch die Abstraction von solcher die Begriffe von den Gegenständen bilden, weil aber hier sich leicht Fehler in diese Begriffe durch die Art ihrer Bildung einschleichen können, und sie nie anschaulich vorgelegt werden mögen, so können daher die philosophischen Begriffe auch nie die unbegränzte Allgemeinheit haben, noch auch die unbedingte Zustimmung erzwingen, wie dies dargegen der Fall bey den Begriffen und Lehren der Mathematik ist, welche alle aus einer Anschauung a priori entstehen, und sich intuitiv demonstriren lassen, da hier in der Mathematik jeder Beweis, oder Demonstration eine intuitive Darstellung seines Begriffes, oder Gegenstandes ist. Wenn daher der Philosoph zum ausführlichen und bestimmten Begriff eines Gegenstandes gelangen will, so muß er von den ersten

Philosophie entwickelt ihre Gegenstände blos aus Begriffen, die Mathematik dargegen stellt die ihrigen anschaulich für die Sinne dar. Die Mathematik belehrt uns nicht wie die Philosophie discursiv, sondern sie verfährt intuitiv, nemlich, daß sie nicht wie die Philosophie aus Begriffen schließt, sondern vielmehr ihre Begriffe construirt, d. i. sie in der Anschauung darstellt, aber dies nicht in einer empirischen, sondern in einer Anschauung a priori, die unabhängig von aller Erfahrung. Die Philosophie kann nur aus der empirischen Wahrnehmung und a priori durch die Abstraction von solcher die Begriffe von den Gegenständen bilden, weil aber hier sich leicht Fehler in diese Begriffe durch die Art ihrer Bildung einschleichen können, und sie nie anschaulich vorgelegt werden mögen, so können daher die philosophischen Begriffe auch nie die unbegränzte Allgemeinheit haben, noch auch die unbedingte Zustimmung erzwingen, wie dies dargegen der Fall bey den Begriffen und Lehren der Mathematik ist, welche alle aus einer Anschauung a priori entstehen, und sich intuitiv demonstriren lassen, da hier in der Mathematik jeder Beweis, oder Demonstration eine intuitive Darstellung seines Begriffes, oder Gegenstandes ist. Wenn daher der Philosoph zum ausführlichen und bestimmten Begriff eines Gegenstandes gelangen will, so muß er von den ersten

a. So wie jede Sache einer doppelten Betrachtung fähig ist, einmal, als Sache ihres Wesens an sich selbst; und zweitens, in Verbindung und Verknüpfung mit andern Dingen, zu welchen sie ihrer Natur nach gesetzt werden kann, oder von denen sie sich als ein Prädicat setzen läßt, und dieses nach der logischen Sprache heißt, die Sache abstract oder concret betrachten; so muß denn also auch die Größe einer dergleichen doppelten Betrachtung fähig seyn. Wenn wir sonach in der Mathematik von Größe in abstracter und concreter Betrachtung reden; so ist dieses nicht etwa eine wesentliche Eintheilung des Wievielen selbst, wie jene S. 7. in absolute und hypothetische, und wiederum in nothwendig und hypothetisch absolute Größe; sondern der Grund dieser Eintheilung liegt lediglich nur in der Form ihrer Betrachtung, je nachdem man sie entweder abstract, oder als das Concret der reellen oder ideellen Ausdehnung bei diesem ihrem Subjecte zugleich betrachtet.

b. Ein Wievieles abstract, ohne Beziehung auf reelle oder ideelle Ausdehnung, also ohne Beziehung auf sein Subject, von dem es gesagt wird, sondern blos nach seiner Einheit und deren Modificationen betrachtet, giebt die abstracte Größe, den Gegenstand der Arithmetik, aber nur (nach a.) von der Form dieser ihrer Betrachtung

a. So wie jede Sache einer doppelten Betrachtung fähig ist, einmal, als Sache ihres Wesens an sich selbst; und zweitens, in Verbindung und Verknüpfung mit andern Dingen, zu welchen sie ihrer Natur nach gesetzt werden kann, oder von denen sie sich als ein Prädicat setzen läßt, und dieses nach der logischen Sprache heißt, die Sache abstract oder concret betrachten; so muß denn also auch die Größe einer dergleichen doppelten Betrachtung fähig seyn. Wenn wir sonach in der Mathematik von Größe in abstracter und concreter Betrachtung reden; so ist dieses nicht etwa eine wesentliche Eintheilung des Wievielen selbst, wie jene S. 7. in absolute und hypothetische, und wiederum in nothwendig und hypothetisch absolute Größe; sondern der Grund dieser Eintheilung liegt lediglich nur in der Form ihrer Betrachtung, je nachdem man sie entweder abstract, oder als das Concret der reellen oder ideellen Ausdehnung bei diesem ihrem Subjecte zugleich betrachtet.

b. Ein Wievieles abstract, ohne Beziehung auf reelle oder ideelle Ausdehnung, also ohne Beziehung auf sein Subject, von dem es gesagt wird, sondern blos nach seiner Einheit und deren Modificationen betrachtet, giebt die abstracte Größe, den Gegenstand der Arithmetik, aber nur (nach a.) von der Form dieser ihrer Betrachtung

also genannt, im Gegensatz jener Betrachtung, wenn man sie als Prädicat in Verbindung mit ihrem Subject, der Ausdehnung zugleich betrachtet, wo man sie nun, um diese Form der Betrachtung zugleich mit anzuzeigen, concret nennt.

c. Diese Eintheilung der Größe rücksichts ihrer Betrachtung, hat man zeither in allen Compendien und mündlichen Vorträgen, gegen alle Logik, in die discrete oder unstetige, und die stetige Größenbetrachtung unterschieden, und daraus ohne allen Urstoff darzu, die discrete oder unstetige, und die stetige Größe geschaffen; weil man, da alle mathematische Erkenntnisse intuitiv (S. 8.) sind, unter Stetigkeit den Begriff der Ausdehnung (S. 3.) in der Mathematik versinnlicht: — und so nannte man denn daher auch bis jetzt selbst die Betrachtung der Größe in Concreto, als Prädicat mit ihrem Subjecte, der Stetigkeit, — Ausdehnung — nemlich zugleich, die stetige Größe, und im Gegentheil dagegen, eine Größe in Abstracto betrachtet, eine unstetige Größe. — Denn, um jene (S. 3. c. e. f. g.) abstract gegebene metaphysische Begriffe von dem Wesen und der Entstehung der Ausdehnung in der Mathematik intuitiv, nach dem nothwendigen Erforderniß dieser Wissenschaft, zu machen, drückt der Mathematiker

solche, durch das für die Sache gewählte Bild der Stetigkeit aus. Bildet nach dem physischen Wesen der Ausdehnung (S. 3.) die Kohäsion der Monaden (Dynamen) die Phänomene der Ausdehnung in ihren verschiedenen Modificationen; so betrachtet nach dem Wesen der Mathematik, S. 8. unbekümmert um die wahre Natur und das Wesen der Dinge, der Mathematiker, um seine Begriffe intuitiv zu machen, diese in ihrer Kohäsion eine Ausdehnung gebende Dynamen, als Punkte, worunter er ein Etwas verstanden haben will, das, als der intuitive Grund der Ausdehnung, einfach, und so aller Theilung, wie die Dyname, unfähig ist. Intuitiv stellt er nun die Kohäsion der Dynamen zur bildenden Ausdehnung vor: durch das Neben einander seyn mehrerer dergleichen einfachen gleichartigen Theile, mehrerer solcher Punkte, und zwar, daß immer das Aufhören des einen, der Anfang des andern sey, so, daß einer so in den andern fließe, ohne daß es möglich, den Punkt, wo zween dergleichen Punkte in einander fließen, als einen dazwischen liegenden dritten anzunehmen, und nennt nun dieses die Stetigkeit. Welchen intuitiven Begriff von dem Wesen der Ausdehnung so, er ihr, der Sache selbst unterschiebt, und so Stetigkeit und Ausdehnung für gleiche Begriffe nimmt, das Bild nemlich für die Sache gesetzt. Wenn also die Kohäsion

der Monaden den allgemeinen Begriff der Ausdehnung bildet; so giebt solchen, nach dem daher entlehnten intuitiven mathematischen Begriff ihrer, die Stetigkeit ihrer Punkte, als welche die Mathematik für die Monaden setzt, und welche als das einfache den Grund von dieser Zusammensetzung in sich fassen, und sonach, zu Folge S. 1. i. * als das erste bey diesem Phänomene keinen weitern Grund ihrer zulassen. Denn, wie sich also physische Ausdehnung in der Kohäsion der Monaden gründet; so die mathematische in der Stetigkeit ihrer Punkte; von welcher aber, gleichwie von der Kohäsion der Monaden, als von dem Wesen und Ersten der Sache, man ohne Widerspruch keinen weitern Grund muß fragen wollen.

d. Da man also Stetigkeit, diese intuitive Vorstellung von Ausdehnung, in der Mathematik für solche selbst, also das Bild für die Sache setzt, Ausdehnung und Größe aber wesentlich, wie Subject und Prädicat S. 3. von einander unterschieden sind, und daher nie mit einander verwechselt werden können und dürfen, ob dieses gleich von Vater Euclides an, bis diese Stunde in allen Mathematiken, durch die beliebig gewesene Eintheilung der Größe in stetige und unstetige geschehen ist; so zeigt sonach der Ausdruck, stetige Größe, ein wahres logisches Uuding an.

Ist dieses aber von der so beliebig bisher benannt gewesenen stetigen Größe erwiesen; so muß es nothwendig auch mit deren Gegentheil, der so betitelten unstätigen Größe eine gleiche Bewandtniß haben.

c. Der Theil der Mathematik aber, welchen man die Geometrie, oder die wissenschaftliche Betrachtung der Stetigkeit (Ausdehnung) nennt, ist also nach seinem Begriff: die wissenschaftliche Betrachtung der Stetigkeit (Ausdehnung) nach dem Inbegriff des Wievielen bey ihr, oder ihrer Größe; und es ist daher die Geometrie nach ihrem Wesen weiter nichts, als die allgemeine Anwendung (practica universalis) der allgemeinen Gesetze der abstracten Größe, auf die Stetigkeit (Ausdehnung) der Dinge. Wenn nun (nach S. 8.) Mathematik überhaupt ist: die wissenschaftliche Betrachtung der Größe nnd ihrer Modificationen; so ist die Geometrie als ein Theil ihrer, nach dem Wesen der Größe, überhaupt eigentlich nichts anders, als: die allgemein angewandte Mathematik; oder, die wissenschaftliche Betrachtung der concreten Größe im Allgemeinen.

Corollarium. Hierbey ist nun wieder anzumerken: betrachtet man die hypothetische Größe als

das Concretum einer Sache; so läßt sie sich entweder als das Concretum ihrer reellen oder ideellen Ausdehnung, oder nur als das seiner in sich schließenden Kraft, und in diesem Falle nur durch ein Mehr oder Minder in Vergleichung angeben, und so sagt man, daß die Sache ihre Größe extensiv oder intensiv habe.

a. So wenig als abstracte und concrete Größe verschiedene Arten von Größe anzeigten, sondern nur die verschiedenen Betrachtungen von Größe bemerkten; eben so wenig können die gebrauchten Ausdrücke extensive und intensive Größe wiederum, für eine würkliche Verschiedenheit der beliebig so genannten stetigen Größe etwa gelten, ob man sie gleich bis jetzt in den mathematischen Lehrbüchern in dieser Qualität aufzustellen beliebt hat; sondern es können diese Ausdrücke nicht anders als Prädicate, die nicht von der Größe, sondern von den Dingen von welchen eine Größe statuirt wird, behauptet werden. Nemlich;

b. Wenn wir an Dingen eine reelle, oder ideelle Ausdehnung in der Würklichkeit S. 3. (extensionem aliquam) percipiren, wo nemlich die, ihre hypothetische Einheit gebende Theile, als

ihre Punkte, in einer Stetigkeit entweder würklich, oder auch nur in unsern Ideen, als ausser einander liegend genommen werden können und müssen, da sagt man: daß das Wieviele dieser Dinge extensiv sey, d. h. in der reellen, oder ideellen Ausdehnung in der Würklichkeit (in extensione) dieser Dinge liege, so wie man eigentlich sagen sollte, nicht aber, wie man falsch gegen das Wesen der Größe bisher sich auszudrücken beliebt hat: daß sie eine extensive Größe haben. Da nun zu Folge S. 3. h. und 1. wir reelle Ausdehnung nur von Körpern, und ideelle Ausdehnung in der Würklichkeit nur von der Dauer, sowohl der Körper als Würkungen behaupten können; so läßt sich also auch nur von Körpern überhaupt, und von den Würkungen nur, insofern man die Dauer ihrer betrachtet, sagen: daß das ihnen zukommende Prädicat der Größe extensiv sey, d. h., daß ihr ihnen zukommendes Wieviele in ihrer Extension liege.

c. Dagegen finden wir bey Dingen blos eine ideelle Ausdehnung (S. 3. l.) aber nicht rücksichts der Würklichkeit ihrer, sondern nur rücksichts des Wie derselben, in der Aehnlichkeit, wo wir im Grunde nur eine Zusammensetzung, ähnlich einer Ausdehnung empfinden, und nur durch ein Mehr oder Weniger in Vergleichung un-

terscheiden können, da sagen wir: daß das Wievіele dieser Sache nicht in einem Aussereinanderseyn ihrer Zusammensetzung, sondern blos in ihr selbst, in dem Daseyn ihrer Kraft beruhe; welches wir ausdrücken müssen: — es habe seine Größe intensiv, (intrinsecus) in seinem Wesen selbst; nie aber kann man, wie bisher doch geschehen, sagen: daß es eine intensive Größe habe; noch weniger aber: — daß es eine intensive Größe sey.

Satz 10. In Betracht also, daß die Geometrie nichts weiter ihrem Wesen nach, als allgemeine Anwendung (practica universalis) der allgemeinen Gesetze und Regeln für das Wievіele in abstracter Betrachtung genommen; ist sonach daher die Arithmetik, die wissenschaftliche Betrachtung der abstracten Größe und deren Modificationen, — nicht nur der erste Theil der Mathematik, sondern sie ist auch nach dem Begriff dieser Wissenschaft, selbst einzig alleine die allgemeine Mathematik selbst, da ja alle die andern Theile dieses Wißbaren nichts weiter, als allgemeine und einzelne Anwendungen (practicæ universales et speciales) der allgemeinen Bestimmungen für das Wievіele und dessen Modificationen eines Etwas, von dem dieses Prädicat als Concret in hypothe-

tischer Bestimmung gesagt werden mag, sind und seyn können.

a. Ist, wie S. 9. d. erwiesen, die Geometrie, als ein Theil der Mathematik, nichts weiter, als die wissenschaftliche Betrachtung der Größe in Concreto; so muß ihr nothwendig die Arithmetik, — die wissenschaftliche Betrachtung der abstracten Größe, und deren Modificationen, welcher sie nach ihrem Wesen fähig ist und werden kann, — als der erste Theil des mathematisch Wißbaren voranstehen, indem sich so ja Arithmetik und Geometrie wie Theorie und Practik gegen einander verhalten, und nach der Form unsers Verstandes wir uns erst den abstracten Begriff einer Sache erworben haben müssen, bevor wir ihn als das Concretum einer andern zu setzen und zu bestimmen vermögen.

b. Daraus fließt aber auch ferner: daß die Arithmetik nach dem Wesen ihres Begriffes a., nicht nur der erste Theil des zu erforschenden mathematischen Wißbaren; sondern, daß sie nach dem Begriff dieser Wissenschaft, S. 8. einzig und allein nur die allgemeine Mathematik selbst sey, weil sie, rein von allen fremden Begriffen, blos nur die Größe zu ihrem Gegenstande hat, und alleine sich nur mit der Aufstellung der allgemeinen Gesetze und Regeln für die möglichen Modi-

fications dieser beschäftigt; deren besondere und einzelne Anwendungen dann nur die Vorwürfe aller der übrigen Zweige dieses Wißbaren sind. Mit allem Rechte muß daher die wissenschaftliche Betrachtung der abstracten, (oder beliebig so genannten unstetigen) Größe, rücksichts jeder ihrer möglich seyenden Modificationen, nach allen ihren Theilen und Abschnitten, in welche sie rücksichts solcher nur zerfällt, allen andern Zweigen der Mathematik vorstehen. Eine Methode, welche Herr Bürja in seinem selbstlernenden Algebristen und andere vollkommen schon befolgt und angewiesen haben. Denn nur so, wenn wir vorher mit den allgemeinen Gesetzen der abstracten Größe bekannt sind, wird es uns leicht werden, eine Uebersicht ihrer concreten Anwendung uns zu erwerben; so wie wir dann auch nur in diesen besondern und einzelnen Anwendungen Klarheit und Richtigkeit erlangen werden, wenn wir zuvor das Wieviele der Dinge erst nach allen seinen Modificationen, abstract genommen, im allgemeinen kennen. Alle mathematische Wissenschaft, ohne auf diesen Weg zu ihrer Erfahrung gegangen zu seyn, muß daher immer mangelhaft bleiben.

c. Die Arithmetik ist sonach die Gesetzgeberin für die ganze Mathematik, denn nur von ihrem Gegenstande, der abstracten Größe, gelten die all-

gemeinen Gesetze, welche unsere Verstandsform als solche für alle Größe anerkennt, und welche bey der concreten Größe nur in ihrer Anwendung, als entlehnte Begriffe aus jener abstracten Betrachtung des Wievielen wiederum vorkommen.

Ersten Theiles
II. Abschnitt.
Insbesondere von der hypothetischen Größe, deren Erkenntniß und Angabe.

Satz II. Zuerst ist hier von dem Ausdruck aller Größe zu merken, das sie nach ihrem Wesen als eine unmittelbare Empfindung, sich durch nichts anders, als durch sich selbst kann angeben und ausdrücken, und nur mit sich selbst kann vergleichen lassen. Um daher die hypothetische Größe eines Etwas zu bestimmen, müssen wir dessen absolute Größe, d. i. dessen Einheit, die es überhaupt als ein Etwas genommen haben muß, in mehrere gleiche Einheiten zerlegen, als aus deren stetigen Verbindung gleichsam dessen absolute Einheit als eine hypothetische Einheit entstanden, und nun die gesammte, oder für sich genommene absolute Einheit dieses Etwas, mit einer dieser gleichen Einheiten, in welche man die an sich genommene absolute

Einheit, als eine hypothetische zerlegte, vergleichen, und dies giebt uns dann den Inbegriff von dem hypothetisch Wievielen, das in einem Etwas enthalten ist. Man muß also, um eine hypothetische Größe zu bestimmen, selbst erst eine Größe als Vergleichungsgröße annehmen, welche dann das Maaß der Größe dieses Etwas heisset.

NB. Groß und Klein sind aber nur relative Begriffe.

a. Den Begriff der Größe kennen wir S. 8. nicht anders als einen Empfindungsbegriff a priori, daher er auch mit allen unmittelbaren Empfindungen dieses gemein haben muß, daß er sich nur durch gleiche oder entsprechende Empfindungen wiederum angeben läßt; denn der Ausdruck gleich, involvirt die Idee des Einerleyseyns des Wesens und der Bestimmung der Dinge, oder, das Ein- und Dasselbeseyn solcher, — und eine Vergleichung ist daher: die Angabe des Einerleyseyns, oder des Ein- und Dasselbeseyns mehrerer Dinge. Alle Größe kann sich sonach nur wiederum durch Größe ausdrücken, und nur in Vergleichung mit Größe sich angeben lassen. Hieraus sehen wir wiederum, daß die absolute Größe, zu Folge ihres Begriffes S. 7. kein Gegenstand unserer Betrachtung seyn könne, weil wir ja an ihr nichts als ihre absolute Ein-

heit bemerken können, sie sonach für jeden ihren Ausdruck nur Eins giebt, und daher nie in eine Vergleichung, als stets eins und dasselbe, gestellt werden kann. Also, nur die hypothetische Größe, der Inbegriff eines Wievielen, das hypothetische Einheit zu seinem Ausdruck hat, S. 7. f. und S. 6. ist für uns einer Betrachtung fähig, daß wir sie nemlich vergleichen und angeben können.

b. Finden wir nemlich, daß die absolute Größe, — die Einheit eines Dinges, die jede Sache faßt und fassen muß, — nach dem Wesen der Sache, sich in mehrere wesentliche Stücke, reelle oder ideelle, ohne Widerspruch zerlegen lasse, also entweder eine hypothetische, oder hypothetisch absolute (S. 7. e.) Einheit sey; so können wir eines der Stücke, die so in ihrer Verbindung Eins gaben, nehmen, und damit die gesammte Einheit, welche die Sache an sich ohne alle Vergleichung, als ihre absolute Größe begriff, vergleichen, d. i. angeben, in wieferne Eins- und Dasselbeseyn — Einerleyseyn — zwischen der hypothetisch genommenen Einheit, und den Einheiten, in die sie zerlegt angenommen worden, statt finde, — und nun bestimmen, wieviel solcher zerlegten Einheiten, die gesammte Einheit der Sache enthalte, d. h. wir benennen nun, wir geben nun die hypothetische Größe eines Din-

ges an, nemlich, nachdem wir vorher die gesammte Einheit der Sache uns in mehrere gleiche Einheiten zerlegt gedacht, und nun die gesammte Einheit wiederum mit einer dieser ihrer gleichen zerlegten in ihr enthaltenen Einheiten verglichen haben. So sehen wir also, was das heisse: daß wenn man die Größe einer Sache angeben wolle, man sie mit einem ihr gleichartigen, d. i. mit Größe selbst wiederum vergleichen müsse.

c. Dasjenige Wieviele von einem Wievielen aber, womit man ein Wievieles vergleichet um es als ein Wievieles auszudrücken, um anzugeben, wie oft es die Einheit (nemlich die zur Vergleichung angenommene) enthalte, heißt das Maaß der Größe. Willkührlich ist es hier, was man zum Maaß einer Größe annehme, da alles Maaß ja so nur eine hypothetische Annahme zur Vergleichung ist; daher denn auch die Maaße für Größe in der Würklichkeit nicht nur der Benennung nach, sondern auch in Rücksicht ihres Gehaltes, so sehr verschieden sind. (S. d. R. S. 150-178.) Eine gleiche Einheit, d. h. ein gleich (S. a.) Wievieles muß aber nothwendig diejenige Einheit seyn, die man zum Maaß der gesammten Größe einer Sache annimmt, d. i. die gesammte Größe muß in gleich viele Einheiten zerlegt angenommen werden, wenn man nun eine davon

zur Vergleichung und Benennung des gesammten Wievielen nach ihm annehmen will, weil sich ja sonsten nicht bestimmen lassen könnte, Wieviel das Wieviele wäre. Setzen wir so z. B. die hypothetisch genommene Einheit Z zerlegt in die gleichen (eben und dasselbe Wieviele ausdrückende) Einheiten a + a + a + a, ist = a + a + a + a; so heißt dieses nichts anders als: das Wieviele Z ist eines und dasselbe Wieviele mit a + a + a + a und so umgekehrt, a + a + a + a = Z.

d. Stellen wir nun zwey Dinge mit einander in Vergleichung, deren jedes wir auf diese Art mit einer und der nemlichen gleichen Einheit eines von beiden, also mit einem gleichen Maaß vergleichen, und finden wir in dieser Vergleichung, daß eines davon solcher Maaße mehr enthalte, so nennen wir in dieser Vergleichung dieses größer und jenes kleiner, d. h. es enthalte in seinem Wesen mehr dergleichen zum Maaß angenommene in solche zerlegte gleiche Einheiten, als jenes in Vergleichung dagegen.

e. Wir sehen also hieraus, daß alle Größenangabe nur auf Vergleichung beruhe, und daher die Begriffe groß und klein, größer und kleiner, größest und kleinest, mehr und minder, ꝛc. nur relative Begriffe, die für sich, ausser unsern

Ideen keine Selbstständigkeit haben, da auſſer diesen, auſſer Vergleichung mit sich selbst oder andern gesetzt, sich von allen nur absolute Größe, nemlich seine Einheit setzen lasse.

Satz 12. Diese Form unserer Vorstellungen, wie wir das Wieviele eines Etwas erkennen und anzugeben vermögen, giebt uns die Begriffe vom Ganzen und Theil; von Zahl und Zählen; von ganzen und gebrochenen Zahlen.

NB. Die Ziffer ist nichts weiter, als das willkührlich angenommene Zeichen für die Bemerkung einer Zahl.

Corollarium. Von der Unendlichkeit der Zahlen; und der Begränzung der hypothetischen Größe eines Dinges.

a. Wie eben S. 11. gezeigt worden: daß wir das nothwendige Wieviele, die Einheit die jedes Etwas für sich begreifen muß, hypothetisch nicht anders, (wenn es nicht absolute Einheit fasset, als für welche wir weiter keinen Ausdruck haben) als aus Vergleichung angeben können, daß wir nemlich ein Stück von diesem nothwendigen Wievielen des Etwas zum Maaß für das Wieviele selbst annehmen, diese Form, wie wir nun so erkennen und angeben können, wieviel das nothwendige Wieviele als ein hypothetisches Wievie-

le (in sofern es sich nemlich nicht als ein Einfaches, sondern als ein Zusammengesetztes charakterisiret) betrage, führt uns auf die Begriffe vom Ganzen und Theil. Das Ganze nemlich nennen wir nun in dieser Vergleichung: den Inbegriff aller der hypothetischen Einheiten, die wir in einer Unzertrenntheit bey einem Dinge beysammen als eine Einheit empfinden und denken. Denn, absolute Einheit giebt, zu Folge ihres Begriffes, S. 6., kein Ganzes, sondern sie ist selbst immer eins für sich. Dem Ganzen sind entgegengesetzt, die es gebende Theile, denn so nennt man in dieser Vergleichung nun die einzelnen gleichen Stücke, die man in ihrer unzertrennten Zusammensetzung als eins, als eine hypothetische Einheit (S. 6.) betrachtet, und von denen man willkührlich eines zum Maaß des zu bestimmenden Ganzen selbst, rücksichts seines Wievielen, annimmt.

b. Ganzes und Theile sind also ebenfalls aus Grund a und S. 11. c. wie dort, groß und klein, mehr und minder ꝛc. nur Vergleichungsbegriffe, die nur in unserer Verstandsform existiren, und also nicht mit der nothwendigen Größe der Dinge eines und dasselbe. Denn, da diese ohne alle Vergleichung für sich betrachtet, nur in der Einheit bestehet, vermöge der jedes Ding, als ein solches für sich betrachtet, sein eigenes Wesen

für sich haben muß, also Eins seiner Art nothwendig seyn muß; so muß alles denkbare, mögliche oder würkliche nothwendig immer eins seyn, da es dem menschlichen Verstande ganz ohnmöglich ist, sich ein Etwas zu denken, das weniger als eins wäre; denn was nicht eins ist, ist nach aller Form unsers Verstandes Nichts, d. h. es ist uns sogar undenkbar. Ausser aller Vergleichung, an sich blos betrachtet, faßt demnach der Theil eben sowohl Einheit, als das in Vergleichung so genannte Ganze. Man kann demnach auch nicht sagen; daß an sich als eine Einheit betrachtet, der Theil eine kleinere Einheit begreife, als das Ganze, weil, ausser aller Vergleichung genommen, Einheit immer nur Einheit ist, und größer und kleiner seyn sich nur erst aus Vergleichung S. 11. c. ergeben, nur erst in hypothetischer Rücksicht genommen, statt haben können.

c. Der Name des Wievielen eines Etwas nun, — die Benennung, wie oft, hypothetisch betrachtet, eine angenommene Einheit (S. 11.) in Etwas enthalten sey, — die Benennung der Einheit, welche als Ausdruck einer Größe stehet, (S. 6.) heißt die Zahl der Größe; und zählen heißt demnach: die angenommene Einheiten in dem hypothetischen Wievielen eines Etwas benennen. Da nun die Arithmetik nach ihrem Wesen, S.

10. sich nur mit der Benennung des Wievielen der Dinge beschäftigt, also, blos Zahlen zu ihrem Gegenstande hat, nennt man sie daher auch die Wissenschaft der Zahlen; in wiefern man nemlich die Benennung einer Sache, für diese selbst annimmt, oder solcher substituirt: und daher kommt es denn auch, daß, weil man bey der Zahl von allen Subject abstrahirt, jede Zahl also für sich der Ausdruck eines Wievielen in abstracto ist; S. 9. b. man bisher, freylich wunderbar genug, unter jeder Zahl eine unstetige Größe hat verstehen wollen, und so die Arithmetik von der Benennung die sie ihrem Gegenstand giebt, im Gegensatz der Geometrie, die Wissenschaft von den unstetigen Größen zu nennen beliebt hat. (S. 9. und 10.) — Die willkührlichen Zeichen, deren sich die Arithmetik für die Angabe der Zahlen bedient, nennt man Ziffern. Zahl und Ziffer sind also, wie Sache und Bild für die Sache wesentlich von einander unterschieden. Man sehe L. d. R. Seite 4 und 10 bis 12.

Wie ferner die Benennung jeder Sache die Erfindung der Willkühr ist; so sind auch die Gesetze für das Zählen willkührliche Annahmen, denen wir aber doch, wegen ihrer allgemeinen Anerkennung, um nicht Sonderlinge zu scheinen, und dem Allgemeinen unverständlich zu werden, folgen müssen, und dieses auch

um so leichter thun können, da, indem doch immer jede Gesetze für das Zählen willkührlich gegeben seyn werden, die Willkühr wohl schwerlich jemals bessere geben wird, als wir in unserer allgemein angenommenen Methode das Zählbare auszudrücken, schon haben. — Wir zählen bekanntlich nach den Gesetzen der Decadik; daß aber dieses Dezimalsystem für die Angabe des Zählbaren, eine willkührliche Annahme sey, beweisen die neben solchem auch bestehende Systeme der Diadik, der Tetractik, der Duodezimal- und Sexagesimalrechnungen, und andere vorhandene, und vielleicht aus Neuerungssucht noch hervorgehende Systeme. Wie wir nun aber, nach dem bey uns allgemein eingeführten Dezimalsystem zählen, d. i. ein Wievieles benennen, dies gehört denn nun besonders in die Arithmetik, wovon s. d. R. Seite 4 bis 10 nachzusehen; so wie man daselbst von Seite 10 bis 12 die Gesetze findet, nach welchen die Römer ehemals zu zählen pflegten.

Man kann aber überhaupt nur die Benennung des Wievielen, also die Zahlen blos als Zahlen, in der Arithmetik an sich und nach ihren möglichen Modificationen betrachten; oder man denkt sich dabey zugleich die Gegenstände, deren Wievieles sie ausdrücken, — für deren Wievieles sie als dessen Benennungen stehen, und so heißt eine Zahl entweder eine unbestimmte, oder bestimmte, — welche Ausdrücke ich lieber wählen würde, als die bis jetzt gewöhnlichen, daß man sie

in unbenannte und benannte eintheilt. Denn wenn Zahl überhaupt weiter nichts ist und seyn kann, als, die Benennung eines Wievielen rücksichts seiner angenommenen Einheiten in ihm; so drückt ja jede Zahl immer an sich schon ein Benanntes aus, nemlich sie benennt immer ein Wievieles, und der Unterschied kann sonach nur darin liegen, ob man bestimmt, oder nicht, wovon dieses Wieviele zelte.

Je nachdem man nun eine Zahl unbestimmt, oder bestimmt gebraucht, zerfällt die Arithmetik in zween Theile, in die reine und angewandte. (Von deren Unterschied siehe l. d. R. S. 91.) — In wiefern sich nun nach ihrem Wesen die reine Arithmetik blos nur mit den abstracten Zahlen und den Gesetzen ihrer Modificationen beschäftigt, kann man sie auch die allgemeine Arithmetik nennen, und diese ist, schon aus S. 10 angeführten Gründen, nicht nur der erste zu erforschende Theil in der Arithmetik, sondern in der gesammten Mathematik, weil sie alleine nur die allgemeine, oder eigentliche Mathematik ist.

Endlich, da eine Zahl immer schon an sich etwas benanntes, ein benanntes Wieviele ausdrückt; so geht man noch allgemeiner, und wählt statt Zahlen markirender Ziffern, Buchstaben, welche man überhaupt als die allgemeinsten Ausdrücke jedes möglichen Wievielen setzt, ohne sich ein benanntes darunter zu denken, und dies giebt die Buchstabenrechnung,

oder die allgemeinste Arithmetik, und so mithin die allgemeinste Kenntniß eines Wievielen und dessen Modificationen. Siehe L. d. R. Seite 453 ꝛc.

d. Rücksichts der Vergleichung nun, wie man eine Zahl als die Benennung eines Wievielen betrachtet, erhält man ganze und gebrochene Zahlen, je nachdem man sie ansiehet als die Benennung eines Wievielen, welches in Vergleichung ein Ganzes, oder nur einen Theil von einem angenommenen Ganzen ausdrückt. In ersterer Beziehung heißt nun die Zahl, eine ganze Zahl, und in letzterer dagegen, ein Bruch, eine gebrochene Zahl. Ausdrücke, die aber nur in Vergleichung ihre Gültigkeit haben, und haben können, da nach b. ausser dieser gesetzt, nur absolute Einheit existirt, und es weder Ganze, noch Brüche giebt. Denn der Mathematiker nimmt seine Einheit nur als eine hypothetische, S. 6., nur immer in Beziehung Eins, in wiefern er mehrere verbundene in dieser ihrer Verbindung als eine Unzertrenntheit betrachtet, und daher giebt er der Einheit den Bruch, als die wesentlichen Stücke, deren unzertrennliche Zusammensetzung zum ganzen Wesen der Einheit gehören, und also vorher gedacht werden müssen, bevor man Einheit und Eins selbst setzen kann. Jeder Bruch ist also in Beziehung auf eine größere mathematische Einheit,

indem er nur einige wesentliche Stücke solcher ausdrückt, weniger als Eins, und auch, absolut genommen, selbst Eins, und enthält Einheit seiner Art, seines eigenen Wesens, hier soviel als der Zähler ausdrückt. Vor und nach der Einheit daher die Unendlichkeit der Zahlen; unendlich daher beide, sowohl positive, als negative Größen. Hier der Grund der Brüche und Dezimalen, welche, so wie ganze Zahlen, unendlich sind.

Beyspiel. Ein Jahr ist eine Einheit, ist Eins, zusammengesetzt aus seinen Brüchen $\frac{1}{1}\frac{2}{2}$, oder $\frac{5}{5}\frac{2}{2}$, oder $\frac{3}{3}\frac{6}{6}\frac{5}{5}$ ꝛc. ꝛc. als seinen wesentlichen Theilen. Die Einheit Jahr ist also undenkbar ohne vorher erst dessen Brüche sich bewußt empfunden zu haben, und der Ausdruck Eins, setzt hier schon die Idee eines vergangenen, eines schon etwas empfundenen voraus, nemlich aller der Brüche, die als wesentliche Stücke in ihrer Unzertrenntheit diese Einheit (Jahr) geben: besonders noch, wenn man bedenkt, daß die Zeit als ein Erfahrungsbegriff, so ihrem Wesen nach, nicht anders als in der Vergangenheit benannt, oder gezählt werden könne. (S. 3. i. und l.) Klar ist also, daß hier nicht der Anfang mit Eins (Jahr) seyn kann, sondern nothwendig mit dem xten Theil, als der einfachen Einheit, dem wesentlichen Stücke von einer in Beziehung größern Einheit y, die hier ein Jahr genannt wird, und daß man nicht eher die Einheit y

nennen kann, bevor man nicht vorher alle ihre wesentliche Stücke in ihrer Unzertrenntheit beysammen, also x/x habe, und nun giebt x/x = y. Der Ausdruck y (für ein Jahr angenommen) ist also nur eine Einheit, in sofern er nemlich alle seine x, alle seine wesentliche Stücke, also x/x als eine Unzertrenntheit involvirt, und y macht also keinen Anfang hier, sondern den Beschluß von x/x = y. Mehr als wahrscheinlich ist es daher, daß man metaphysisch-mathematisch gefehlet, als man den Anfang des neunzehnten Jahrhunderts mit dem Jahr 1801 setzte, der doch ewig und nothwendig schon mit dem 1. Januar 1800 eintrat und anheben mußte. Ja! wendeten dagegen die Denker ein, Null ist ja nichts, und vor der Eins steht Null; wohl! in den Köpfen mancher Denker steht vor der Eins Null, und wohl auch nach der Eins — die metaphysische Mathematik findet hier aber vor der Eins y nicht Null, sondern ihren Bruch x/x, der, als wesentliche Stücke von y ein Bruch, für sich selbst aber wiederum Eins seines Wesens ist, und also nothwendig hier den Anfang von y involviren muß, weil zum Wesen von y gehört, daß es unzertrennlich in sich alle die für sich bestandene Einer x (Wochen, Tage, Stunden, Minuten, Secunden, Nu's) nun als Eins in sich begreife.

e. Wir kommen hier nun auf die eigentliche mathematische, von der metaphysischen, S. 7. d. wesentlich unterschiedene Unendlichkeit, welche aus

dem Wesen der hypothetischen Größe fließet, nach welchem diese, zu Folge S. 8. zu ihrer wesentlichen Bestimmung hat, daß alles, von dem hypothetische Größe sich behaupten läßt, nach seinem Wesen daher Vermehrung oder Verminderung fähig seyn muß. Denkbar und möglich ist uns daher in einer dergleichen Zusammensetzung zu einer hypothetischen Einheit, (in Abstracto als Concreto betrachtet) noch immer so eins davon hinwegzunehmen, oder hinzuzusetzen, ohne daß wir den Punkt, wo diese Vermehrung oder Verminderung aufhören müsse, je zu bestimmen fähig wären: und dieses Nichtbestimmenkönnen, wo diese Vermehrung oder Verminderung je aufhöre, nennen wir die Unendlichkeit der hypothetischen Größe. Welche Unendlichkeit aber, wenn wir das Wesen der hypothetischen Größe betrachten, als deren Prädicat sie ist, und deren Wesen sie sonach als solches, nicht widersprechen darf, uns nothwendig von anderer Natur, als die streng metaphysisch genommene Unendlichkeit, die nur von nothwendig absoluten Größen gelten kann, erscheinen muß. Denn, ist es wesentliche Bestimmung, daß alles, was eine hypothetische Größe hat, Vermehrung oder Verminderung fähig ist, also als eine Zusammensetzung sich characterisirt; so folgt daraus nothwendig: daß absolut (ohne alle Beziehung genommen) nichts, was hypothetische

Größe hat, im strengen metaphysischen Verstande unendlich seyn kann. Was also dem Wesen des Subjects widerspricht, das kann auch nicht in seinem Prädicat liegen, daher auch, daß keine hypothetische Größe unendlich, im metaphysischen Sinn des Wortes, seyn könne; sondern, alles was Zusammensetzung, reelle oder ideelle, involvirt, muß, an sich betrachtet, seine Gränze, seine Einschließung haben; denn alles was Vermehrung oder Verminderung fähig ist, schließt die Idee des begränztseyn in sich.

Der Gedanke einer Gränze, faßt die Idee einer Einschließung, als das äusserste einer Sache, das Ende solcher in sich, daher sie auch die Mathematik das äusserste der Dinge nennt. Einschließung faßt aber eine Mehrheit von neben einander bestehenden Stücken in sich, — also Theilbarkeit, — Verminderung, und auch ein mögliches mehreres Hinzukommen, — einer Vermehrung dieser Stücke in der begränzten Sache. Jede Vermehrung einer Sache, so wie deren Verminderung, zeigt eine bestimmte Festsetzung derselben, ein begränzt seyn, und mit diesem, ein Ende haben, solcher an, denn, die Sache hört da auf, ist da endlich, ist da an ihrem Ziel, an ihrem Ende; daher man auch alles, was begränzt werden kann, von dem sich also hypothetische Größe sagen läßt, endlich nennet. Das Gegentheil davon ist das eigentliche, oder metaphysisch unendliche;

welches seinem Wesen nach unbegränzt, also ohne alle hypothetische Größe ist.

Es involvirt aber die Idee der Gränze, des begränzt seyn, nothwendig etwas Einfaches an sich untheilbares, keiner weitern Vermehrung oder Verminderung fähiges, denn anders müßte es widersprechend eine Gränze in und von der Gränze wiederum geben; daher die Mathematik die Gränze in einem Punkte (S. 9. c.) bestimmt. Denn, wenn man sagt: daß die Gränze eines Etwas vermehrt oder vermindert werden könne; so gilt dies von der ganzen Größe, mit nichten aber von deren Gränze; und eine Sache vermehren oder vermindern heißt sonach nur: ihre Gränze weiter hinaussetzen, oder solche einziehen, verengen, kürzen.

Keine hypothetische Größe kann also, absolut betrachtet unendlich seyn, daher das mathematisch unendliche nur einen relativen Begriff involviren kann. Das absolute, oder metaphysisch unendliche schließt jede Beschränkung aus; nicht so das mathematisch Unendliche; dieses hat immer seine Gränzen, und hier heißt unendlich nur: dessen Gränzen sich von uns nicht bestimmen lassen. Unendlich bezeichnet sonach in der Mathematik, sowohl den Ausdruck der größesten, als auch der kleinsten Größe.

Satz 13. Je nachdem die Vergleichung (S. 11. e.) nun aber, in der wir die Größe (abstracte

oder concrete) eines Etwas wiederum betrachten, selbstige Würklichkeit in der That, oder nur eine ideelle Würklichkeit rücksichts eines Wievielen zum Gegenstande hat; unterscheiden wir wiederum die aus ihr begriffene Größe in die eigenthümliche und verhältnißmäßige Größe; unter welcher letztern auch die entgegengesetzten Größen, und sonach auch die Brüche mit begriffen sind.

NB. Von dem Ausdrucke des Nichts.

a. Wenn wir so hier wiederum die Größe, — abstracte als concrete — in eigenthümliche und verhältnißmäßige eintheilen; so wollen wir hier wiederum eben so wenig eine eigene Classification des Wievielen aufstellen, als dieses unsere Meinung war, wie wir S. 9. a. als etwas abstractes oder concretes benannten; sondern es soll hier, wie dort, diese verschiedene Benennung nicht genus oder speciem der Sache, sondern nur der Art der möglichen Betrachtung solcher ausdrücken.

Denn, so wie alles Denkbare, entweder für sich selbst betrachtet werden kann, und alsdann Sache ist, (S. 1. k.); oder nur in Vergleichung, in ideeller Würklichkeit denkbar ist, und hier ein Verhältniß heisset; so findet bey der Vergleichung, die uns die Größe kennen lehrt auch, entweder ein absoluter, für sich bestehender, oder nur ein ideeller Zusammenhang

statt, und ist der letztere Fall, daß man die Größe zwoer Dinge nur in einem ideellen Zusammenhange betrachtet und vergleichet, wo die eine Größe aufhört dieselbe zu seyn, wenn man die andere wegnimmt; so stehen diese beide Grösßen zu einander im Verhältniß; welcher Ausdruck nur etwas, das in Beziehung ein Etwas ist, aber nicht absolut für sich ausser dieser Beziehung, also nur einen ideellen Zusammenhang zwischen beiden ausdrücken will. Der Ausdruck a : b = x, (12 : 4 = 3) welchen man ein Verhältniß nennt, (s. d. R. S. 1.) bestimmt hier keinesweges einen absoluten Zusammenhang zwischen diesen beiden Größe a, b, sondern nur einen ideellen; denn es wird hier keine absolute, sondern nur eine relative Größe bestimmt, welche die eine Größe gegen die andere, in dieser Vergleichung genommen hat, und die Bestimmung, welche dieses ausdrückt, der Terminus dieses ideellen Zusammenhanges, ist die Größe x, welche hier der Name, der Exponent des Verhältnisses heisset.

b. Noch eine andere Art blos in Beziehung, und also ebenfalls blos in einem ideellen Zusammenhange stehende Grösßen, sind die entgegengesezten Grösßen. Wenn man einer bejahenden (positiven) Größe, eine andere gleicher Art verneinende (negative) zur Seite sezt, und sie nun in einer solchen Beziehung gegen einander betrachtet, daß sie entweder einander ganz, oder

zum Theil aufheben. Die Ausdrücke ✝ a ✝ b — c — x ✝ y bezeichnen dergleichen entgegengesetzte Größen, und es drükt hier ✝ a ✝ b ✝ y etwas positives aus, und dagegen die gleichartige Größe — c — x in dieser Beziehung etwas negatives; aber auch nur in dieser Beziehung. Denn für sich betrachtet, müssen alle Größen positiv seyn; keine kann absolut negativ angenommen werden, da sonst Größe und auch Nichtgröße in Einem Begriff vereint würde, welches undenkbar ist. Nur in einer solchen Beziehung, wo man zwo Größen einer Art einander entgegengesetzt betrachtet, wird die eine negativ, in Betrachtung nemlich gegen die andere; daher es auch willkührlich, welche man von dergleichen entgegengesetzten Größen mit ✝ oder — bezeichnen will; weil sie absolut genommen beide ✝ Größen seyn müssen, ausser diesem ideellen Zusammenhange beide nemlich gesetzt.

c. Jeder Bruch b/a drückt daher etwas negatives aus, in der Beziehung nemlich auf die größere Einheit a von der er ein Bruch ist. Denn man denkt sich eine Größe a mit allen ihren Theilen in einer verbundenen Unzertrenntheit, also, als eine Einheit dieser Art, und da ist denn a eine ganze Zahl. Setzt man nun dagegen eine gleichartige Zahl b, die in Beziehung auf a, nur einen, oder etliche von den gleichartigen in

Unzertrenntheit beysammenen Theilen von a begreift, deren Ungetrenntheit man die Einheit a nannte; so drückt nun in dieser Beziehung auf a, die Zahl b ein negatives, etwas mangelndes von der Einheit a aus, ein Weniger als Eins, und um diese Beziehung anzuzeigen, drückt man die Größe nun aus durch b/a, und nennt diese Größe einen Bruch, eine gebrochene Größe, — nur ein Stück von einer Einheit a, — ein Weniger als ein a, und b ist also hier die negativ entgegengesetzte Größe von a. Auser welcher Beziehung aber b eben so gut wie a eine positive Größe bezeichnet, und gleich a eine Einheit seiner Art ist. Man sehe S. 12. d. Doch liegt hier in dem Ausdruck b/a das negative nicht etwa in b selbst, nemlich a als die Einheit angenommen, sondern in der Differenz, welche zu b gesetzt, b = a machen würde.

d. Was endlich den Ausdruck des Nichts betrift, so ist hier zu erinnern: der Ausdruck Nichts, absolut gebraucht, begreift im strengen metaphysischen Sinne, und so also auch in der Mathematik: das Undenkbare, das einen Widerspruch, ein Seyn und Nichtseyn zugleich in sich fassende, das dem Möglichen entgegengesetzte. Nichts, ist also im eigentlichen Sinne das entgegengesetzte von dem Etwas. Was nicht Etwas ist, ist Nichts, d. h. gar nicht als ein

Etwas denkbar. Da nun der Ausdruck für jedes Etwas dessen Einheit ist, und man also nach S. 2. Etwas und Eins für gleichbedeutend setzen kann; so ist demnach Nichts das Gegentheil von dem absoluten Eins; daher S. 12. b. daß, was nicht Eins, nichts sey. Anschaulich drückt man diese Demonstration des absoluten Nichts in der Mathematik aus, wenn man z. B. die Aequation setzt: ✝ A — A = o, d. i. Nichts ist gleich derselben Größe, die zugleich als ✝ A, und auch als — A angenommen werden sollte; denn — A widerspricht ✝ A, hebt es gänzlich auf, — es ist kein ✝ A denkbar, das auch zugleich — A wäre, und der Ausdruck ✝ A — A ist also nichts.

Wie nun aber nach diesem unsern Satz, jede Größe entweder als eine eigenthümliche oder verhältnißmäßige betrachtet werden kann; so also auch das Nichts, als das entgegengesetzte von dem Wievielen, — das Keinvievieles. — Es besteht sonach neben dieser Idee des eben demonstrirten absoluten Nichts, auch noch die des comparativen Nichts, welches nur einen relativen in Beziehung stehenden Begriff ausdrückt, ausser solcher aber gesetzt, wohl noch Etwas seyn kann; als: Ehrnpastors ** hochgepriesene Beredsamkeit ist nichts gegen Zollikofers. Für sich bleibt, ausser dieser Beziehung betrachtet, deswegen Ehrnpastors ** Beredsamkeit doch immer noch Etwas,

denn sie ist wenigstens doch ein wohlklingendes und passabel declamirtes Gewäsche. Auch diese relative Bedeutung des nichts ist in die Mathematik aufgenommen, z. E. das fehlende an der Quadratur des Kreises kann bis auf nichts gebracht werden; und deswegen beträgt dieses fehlende doch immer noch Etwas.

Zweeter Theil.

Allgemeine Gesetze für hypothetische Größe.

Satz 14. Wir kommen nun von den allgemeinen Begriffen der Größe in überhaupt, als denen der hypothetischen Größe in Abstracto genommen, zu den allgemeinen Gesetzen für Größe und Größenmodificationen. Philosophisch überhaupt genommen, heißt ein Gesetz: ein nach der nothwendigen Denkform unsers Vorstellungsvermögens aus dem Wesen der Dinge fließendes Resultat für die Norm ihres Seyns, und ihrer möglichen Modificationen. Die besondere Anwendung von diesem allgemeinsten Begriffe eines Gesetzes, giebt uns nun den Begriff eines mathematischen Gesetzes. Der Begriff Gesetz involvirt jedesmal einen Satz, welcher die Norm für eine Sache und deren Veränderungsdarstellung ausdrükt. Letzteres besonders, ist wie ersteres wesentliche Eigenschaft

jedes Gesetzes. Denn, wenn wir von irgend etwas sagen: daß es Gesetzen unterworfen sey, so verstehen wir jedesmal darunter, nicht nur die Norm wie die Sache an sich selbst, sondern auch wie sie in ihren Veränderungen seyn soll. Aber wir verstehen hier nicht etwa eine willkührlich angenommene Norm für das Seyn der Sache und ihre darzustellende Veränderungen, nicht etwa Launen, Willkühren, Befehle, als die dem Begriff Gesetz entgegengesetzte Normen; — sondern die Normen, die für das Seyn der Sache selbst und ihre Veränderungen als Resultate der nothwendigen Denkform unsers Vorstellungsvermögens aus dem wahren Wesen der Sache selbst fließen; — nur diese bezeichnen wir mit dem Ausdruck Gesetze. So nennen wir Natur-Gesetze in der Physik, die aus dem erforschten Wesen der Naturphänomene erkannte Norm ihrer Existenz und Würkungen. — Die aus dem Prinzip der Moral, als ihrem Wesen, nothwendig fließende Normen für die Beschaffenheit eines gebildeten Menschen und seiner Handlungen, heissen uns Moral-Gesetze; — so wie die, aus dem Wesen des Staates fließende Normen für die Beschaffenheit eines Unterthanen und seiner Handlungen, Staats-Gesetze heissen.

Allgemeine Gesetze für Größe und deren Modificationen heissen demnach hier in besonderer Anwendung auch: die nach der nothwendigen Denkform unsers Vorstellungsvermögens aus dem Wesen der Größe abstrahirte Resultate für die Norm der Größe selbst und ihrer möglichen Modificationen.

Das Größen-Gesetz kann also, wie jedes Gesetz, nichts dem Wesen der Größe selbst widersprechendes, oder auch in solchem nicht liegendes enthalten, widrigenfalls es sonst aufhörte zu seyn, was es seyn sollte. Jedes mathematische Gesetz muß sich also induziren, daß es nicht sowohl dem Wesen der Größe nicht widersprechend, sondern daß es auch in solchem selbst als Gesetz liege. Alle mathematische Gesetze erscheinen daher auch als die Grundsätze oder Axiome in dieser Wissenschaft, (S. 1. i. *) welche uns das Wie von jedem Phänomen der Größe bestimmen und angeben, und als solche daher für sich selbst wohl eine Induction ihrer, nicht aber einen weitern Beweis ihrer gestatten.

Je nachdem wir nun aber bei der Größe entweder auf ihre Entstehung und Bildung, oder auf sie selbst, oder auf ihre Modificationen zu sehen haben; unterscheiden sich auch die Größen-Gesetze in dreyfache, nach dieser benannten dreyfachen Verschiedenheit ihres Gegenstandes, welche wir nun so in dieser ihrer natürlichen Ordnung in den drey auf einander folgenden Kapiteln abhandeln wollen.

Zweeten Theiles

I. Abschnitt.

Gesetze und Ausdrücke für die Entstehung einer hypothetischen Größe.

Satz 15. Jedes Wieviele a schlechthin gesetzt, giebt uns die intuitive Idee des **Einfachen**; mehrere male nach und nach zu sich selbst gesetzt, die eines **Vielfachen**, eines etliche, oder mehrere male Genommenen.

Setzet man ein Wievieles a schlechthin, so heißt solches das einmal nehmen desselben, und dieses giebt den intuitiven Ausdruck für das Einfache, (S. 1. m. **) wie auch für die absolute Größe jeder Sache. (S. 7. b.)

Dagegen, setzet man ein Wievieles a, nach und nach zu sich selbst, als a + a + a + a...., und nimmt es nun unter einer Benennung als ein Ungetrenntes, also, als eine Zahl = Z (S. 12.) mit sich zusammen; so heißt dieses: solches etliche, oder meh-

rere male nehmen, welches also eine zwölfte Wiederholung eines Wievielen ist. Die wiederholte Setzung eines Wievielen aber, und dessen Benennung unter einem Ausdruck (durch eine Zahl) giebt das Vielfache. Setzt man z. B. a ✝ a ✝ a ✝ a = Z; so ist nun Z ein Vielfaches von a ✝ a .... (S. 11. b. c.)

Satz 16. Nach dem Wesen ihrer Erkenntniß und Angabe, S. 11. a. b. c. ist sich jede hypothetische Größe als ein Vielfaches vorzustellen, das aus der Verknüpfung von Wievielen wiederum, als seiner es gebenden Theile, in dieser Vergleichung als eine Unzertrennt-heit entstanden ist. Darnach nun diese in solcher Verknüpfung zu einem Vielfachen, als die es gebende Theile, stehende einzelne Wieviele, gleicher, oder ungleicher Benennungen selbst wiederum sind, werden sie in die aliquoten und aliquanten Theile desselben unterschieden.

Wenn man nach S. 11. c. eine Größe Z nicht anders als aus der Vergleichung mit ihrem Maaße a erkennen und angeben kann, und man nur erst nach dieser Vergleichung erkennen und sagen kann, daß Z = a ✝ a ✝ a ...., je soviel man nemlich Z, mit dem andern Wievielen, das man a nannte, und zum Maaß von Z angenommen, hatte vergleichen können;

so ist demnach eine jede Größe Z sich als der Inbegriff eines Wievielen vorzustellen, das aus der Wiederholung eines andern Wievielen a erzeugt worden: und wenn sonach $Z = a + a + a \ldots$; so heisset Z ein Vielfaches (Multiplum) von a, und man sagt: daß Z enthalte a etliche male, (S. 15.) und dagegen heißt alsdenn a ein Submultiplum, oder ein Aliquotum, oder, (in wiefern nun hier a ein Theil von Z ist S. 12. a. b.) auch ein aliquoter Theil von Z; und man sagt: a ist in Z etliche male enthalten.

b. Dagegen, denkt man sich Z in die Einheiten b + c .... zerlegt, wo wohl $Z = b + c \ldots$, nicht aber auch $Z = b + b + b \ldots$, daß also wohl in Vergleichung $Z \nearrow b$, nicht aber Z aus der Wiederholung von b + b + b ... entstehet; so heissen b als c ... Aliquanta, oder auch aliquante Theile von Z. Z. E. da $12 = 4 + 4 + 4$; so ist 12 ein Vielfaches von 4, und 4 ist ein Aliquotum von 12. Hingegen setzet man $12 = 9 + 3$; so ist 9 ein Aliquantum von 12, weil wohl $12 \nearrow 9$, nie aber aus 9 + 9 .... entstehen kann.

Hieraus fließt also weiter nach S. 11. c. für die Betrachtung und Angabe einer hypothetischen Größe das Gesetz: — „der Theil, der zum Maaß für die „Größe selbst angenommen wird, muß nothwendig „ein aliquoter Theil derselben seyn, und nie kann ein

„Aliquantum in einem Vielfachen, als Maaß dieses „angenommen werden.“

Satz 17. Nach dem Begriff des Ganzen, S. 12.

a. ist sonach jede, (dem Wesen ihrer Entstehung nach, als ein Vielfaches sich characterisirende S. 16.) hypothetische Größe ein Ganzes; und die in ihr enthaltene Aliquota und Aliquanta sind die gleichen, oder ungleichen Theile davon. Von denen man nun wiederum Nebentheile, Ergänzung zum Ganzen, würkliche und mögliche Theile bemerket.

Wenn jede hypothetische Einheit $Z = a + a + a \ldots\ldots$, oder $Z = b + c \ldots\ldots$ S. 11. c. u. S. 16., also in dieser Vergleichung ein Ganzes giebt; so ist jede Einheit, die man sich so als den Inbegriff eines Vielfachen denkt, ein Ganzes. S. 12. a.

b. Wenn ferner ein Wievieles a mit einem oder mehrern gleichartigen Wievielen, also mit $a + a \ldots$, oder mit $a + b + c \ldots$ zusammen genommen als eine Einheit Z betrachtet werden kann; so heißt a ein Theil von Z S. 12. a. und dieses ein Ganzes. S. 12. a.

c. Besteht nun Z aus $a + a + a \ldots\ldots$, d. i. aus lauter solchen Einheiten, die als Einheiten in Z

alle eines Wesens und Benennung sind; so heißt a in dieser Vergleichung ein gleicher Theil von Z. Dagegen heißt a oder b ein ungleicher Theil von Z, wenn Z = a + b + c .... den Inbegriff solcher zu Einem verbundener Einheiten ausdrückt, die als Einheiten von verschiedenen Wesen und Benennung für sich erscheinen. S. 11. 15. u. 16.

Die Aliquota a + a + a ...., oder die Aliquanta a + b + c (S. 15. u. 16.) also, welche ein Vielfaches geben, sind, in wiefern man dieses als eine Ungetrenntheit, — als ein Ganzes betrachtet, die gleichen oder ungleichen Theile desselben.

d. Ferner heissen nun a + a ...., oder b + c .... die mit a zusammen Z als ein Ganzes erzeugen die (nach c gleiche oder ungleiche) Nebentheile (Compartes) von a, oder die Ergänzung des Theiles a zum Ganzen Z; und der Theil a mit allen seinen Nebentheilen zusammen heissen die würklichen Theile von Z. (Partes actuales.)

e. Nimmt man dagegen einen Theil a mit dergleichen Theilen zusammen, die nicht dessen Nebentheile ausmachen, so heissen solche blos mögliche Theile. Potentiales.

Z. B. 7 + 5 + 3 = 15; demnach ist 7 ein Theil von 15, und 15 ein Ganzes, so wie in dieser

Verbindung 5 und 3 die Nebentheile von 7 sind, und 7 + 5 + 3 sind also die würklichen Theile von 15; — dagegen 7 + 5, oder 7 + 4 + 2 blos mögliche Theile von 15 sind. — Das Ganze drückt also jedesmal eine solche Einheit aus, die man nach S. 11. c. u. S. 15. u. 16. als ein Vielfaches begreifet.

f. Wie nun die Benennung eines Wievielen die Zahl giebt, (S. 12. c.) deren bildlicher Ausdruck wiederum die Ziffer ist; so heißt also der Ausdruck für ein Ganzes in dieser Vergleichung eine ganze Zahl, wenn sie so als der bestimmte Ausdruck für die zusammengesetzten Einheiten stehet, die so in dieser Zusammensetzung ein Ganzes genannt werden. Ist so b = a, so sagt man daher b enthält a einmal, oder, b ist so groß als ein *a*; ist b = a + a, so sagt man, b enthält a zweymal, oder b ist so groß als zwey *a*; ist b = 2a + a, so heißt b so groß als drey *a* ꝛc. und so entstehen auf diese Art, alle mögliche ganze Zahlen ins unendliche. Diese Einheit hier aber, welche das Maaß vorstellt, durch dessen successive Zusammensetzung alle übrige ganze Zahlen erzeugt werden, nennt man in dieser Rücksicht einen **Einer**, und so bestimmt jede ganze Zahl zugleich die Menge der Einer, die sie enthält. Die Zahl 9 enthält also neun Einer, die Einheit neun mal; ist = 1 + 1 .... + 1; und es ist sonach jede ganze Zahl 12 auch 12 mal

so groß als 1, d. i. 12 = 12 mal 1; oder, jede ganze Zahl 12, ist so groß als 1 mal 12, d. i. 12 = 1 mal 12.

Satz 18. Zwo Größen b und c beide aus einerley Maas a erzeuget, geben in Vergleichung gegen einander gesetzt, hier entweder die Begriffe von einem Gleichvielfachen, oder vom größer und kleiner seyn.

In wieferne man nemlich rücksichts ihrer Entstehung oder Erkenntniß nach S. 11. u. 16. jede hypothetische Größe als ein Vielfaches betrachten kann; so geben nun erstlich zwo Größen b und c, die beide aus einerley Maaß a entstanden sind, (S. 11.) wenn sie nach angeführten Satz in Vergleichung gegen einander gesetzt werden, ein Gleichvielfaches, (Aequimultiplum) d. i. ein Vielfaches von einem und demselben Wesen und Benennung, wenn sie nemlich beide, entweder durch das Maaß a alleine genommen (S. 15.) oder durch eben dieselben Wiederholungen desselben erzeugt werden, d. i. wenn sowohl b als c, eine jede entweder = a, oder = a + a + a ... sind. Nothwendig müssen aber beide Größen b und c aus einerley Maaß a, als einen gleichen aliquoten Theil beider erzeugt worden seyn, wenn anders die Bestimmung ihrer als gleichvielfacher uns möglich werden soll. S. 11. c.

Wie man nun wiederum umgekehrt nach S. 16. jedes Vielfache für eine hypothetische Größe nehmen kann; so sind also zwo Größen b und c, die sich so als gleichvielfache characterisiren, selbst auch gleiche Größen, — Wieviele von einerley Wesen und Bestimmung.

Wenn demnach irgend ein Maaß a in b und c gleich viele male enthalten ist; so sind b und c einerley Größen, d. i. b = c und umgekehrt: und wenn b = c ist; so ist jedes Maaß a von b, auch in b und c gleichvielmal enthalten. Denn, wenn z. E. b = a + a + a, und c = a + a + a; so ist nothwendig b = c (S. 11. c.) und wenn b = c, so muß wenn b = a + a + a auch c = a + a + a seyn.

b. Oder zweytens, es geben diese beide aus einerley Maaß a erzeugte, und in Vergleichung gegen einander gesetzte Größen b und c in dieser Vergleichung die Begriffe von kleiner und größer seyn. Denn ergeben sie sich nun nicht als gleichvielfältige rücksichts ihres gemeinschaftlichen sie erzeugenden Maaßes; so muß nothwendig eine von beiden das Maaß a mehrere male als die andere enthalten, und dies heißt die eine ist größer, und die andere kleiner. S. 11. d. Denn wenn auser demjenigen ein, oder mehrere male nehmen des Maaßes a, wodurch b erzeugt wird, das Maaß a noch ein, oder mehrere male genom-

men werden muß, um das Quantum c zu erzeugen, d. i. wen $b = a$, aber $c = a + a \ldots$, oder, wenn $b = a + a$, aber $c = a + a + a \ldots$ u. s. w. ist; so sagt man: a ist in c mehrere male enthalten, als in b, und b und c sind in dieser Vergleichung ungleiche Größen, d. h. sie sind der Inbegriff von Wievielen von verschiedenen Wesen und Bestimmnng, und müssen daher, als Größen betrachtet, eine kleiner, die andere größer seyn. Denn, wenn durch eben dasselbe ein, oder mehrere male Nehmen eines Maaßes a, welches die Größe b erzeugt, die Größe c nicht erzeugt wird, sondern um diese zu erzeugen, noch irgend ein gleichartiges d hinzugesetzt werden muß; so heißt in dieser Vergleichung c **größer als** b, und b **kleiner als** c. Also heißt c **größer als** b, und b **kleiner als** c, wenn $c = b + d$, und nicht zugleich $b = c$ ist, d. i. wenn b einen Theil von c, und nicht zugleich dem ganzen c gleich ist. S. 12.

Also, wenn c und b ungleich sind; so ist entweder $c \succ b$, oder $c \prec b$. Denn, da weder b der ganzen c, noch c der ganzen b gleich ist; so ist entweder b ein Theil von c, oder c ein Theil von b, also entweder c $\succ$ b, oder $c \prec b$. Von zween Größen c und b, ist also allemal entweder $c = b$, oder $c \succ b$, oder $c \prec b$.

c. Seßen wir den Fall, daß eine Größe a ein Vielfaches von c (also ein 12faches von c) wäre, sonach c zu seinem Maaße hätte, c aber das als ein 11mal genommenes erst a gäbe, also nothwendig (nach S. 6.) kleiner als a wäre; so ist auch c nothwendig ein Maaß von jeder Größe x $=$ a $+$ a, oder $=$ a $+$ c ....., weil man nach S. 18. a. für jedes a als ein Maaß von x, auch die 12malige Wiederholung c seßen kann, welche in ihrer Verknüpfung $=$ a ist. Nimmt man aber eine andere Größe p $\prec$ c; so ist c kein Maaß mehr von a $+$ p. Z. B. 9 ist ein Maaß von 54, 9 $\prec$ 54, und wiederum 7 $\prec$ 9, also ist 9 kein Maaß von 54 $+$ 7 d. i. von 61.

Denn da c ein Maaß von a, aber nicht gleich a, sondern kleiner als a, so ist also auch c in a nicht einmal, sondern mehrere male (nach S. 18. a. u. b.) enthalten, folglich ist a ein Vielfaches von c, S. 15. und sonach das nächstfolgende Vielfache von c in dieser Zusammenseßung $=$ a $+$ c. Nun ist angenommen c $\prec$ p; demnach auch a $+$ c $\prec$ a $+$ p (S. 18. b.) mithin a $+$ p kein Vielfaches von c, also ist c in a $+$ p auch nicht mehrere male enthalten (S. 16.) und daher c kein Maaß von a $+$ p. S. 11. 16.

Satz 19. Das Einmalnehmen eines Wievielen a, heißt, es in der Einheit seßen, sein unbestimmtes Etlichemalnehmen, giebt den Be-

griff Menge. Können wir die Gränze dieses Wiederholen von a in einer Menge bestimmen; so heißt die Menge endlich, im Gegentheil unendlich. S. 12. e.

Dieser Grundsatz hängt oben mit S. 15. auf das genaueste zusammen. Dort war die Rede vom Einfachen und Vielfachen, in wieferne nemlich dieses aus der Zusammensetzung des einfachen entstehet, und nun so in dieser Zusammensetzung als eine Unzertrenntheit wiederum Einheit, als ein hypthetisches Wievieles, oder als eine hypothetische Größe giebt, da nach S. 16. jede hypothetische Einheit ihrem Wesen nach der Ausdruck eines in Unzertrenntheit beysammen bestehenden Vielfachen ist. Wenn nun hier die Rede von Einheit und Menge ist; so soll in dieser Verbindung der Ausdruck Einheit, im Gegensatz von einer Menge, nicht jenes Einfache ausdrücken, welches in seiner Zusammensetzung das Vielfache wiederum als eine hypothetische Einheit giebt, sondern hier involvirt der Ausdruck: eine Einheit *a*, selbst ein solches Vielfaches, das aus dergleichen einfachen Wievielen a, wie dort S. 15. gemeint waren, entstanden ist, und nun wiederum als eine für sich bestehende Einheit; — als der Inbegriff der Ungetrenntheit irgend eines Etwas, das so in dieser seiner Ungetrenntheit den Begriff Eins (S. 6. c.) giebt, stehet; — und eine dergleichen Einheit a, als den Ausdruck für ein Wievieles in dieser seiner Ungetrenntheit, nach S. 15. schlecht-

hin geſetzet, heißt es, das Wieviele a, für deſſen Ausdruck es ſtehet, in der Einheit ſetzen, es als eins, als eine Eins ſetzen. — Ferner das mehrmalige Setzen (S. 15.) von dergleichen Einheiten, die ihrer Entſtehung nach der Inbegriff eines Vielfachen in einer beſtehenden Unzertrenntheit ſind, giebt den Begriff der Menge.

Ein Vielfaches und eine Menge, haben alſo einerley Entſtehungsform gemeinſchaftlich, wie die vom Vielfachen, S. 15. ſie unterſcheiden ſich aber weſentlich: indem erſteres nur der Inbegriff ſolcher Einheiten iſt, die, indem ſie in ihrer zuſammengeſetzten Unzertrenntheit beyſammen, ſo erſt ſelbſt das Vielfache als eine Einheit erzeugen, in dieſer ihrer Verbindung zu einem Vielfachen erſt die Einheit, als den Ausdruck für eine Größe geben; S. 16. — dagegen letztere der Inbegriff ſolcher Einheiten iſt, deren jede für ſich genommen ein Vielfaches ausdrückt. Die Zuſammenſetzung von Vielfachen erzeugt alſo erſt die Menge.

b) Die Einheit iſt ſonach nicht nur das Maaß von ihr ſelbſt, als den Ausdruck für jede Größe, S. 11. ſondern auch von jeder Menge. Denn ſo wie die Einheit durch Gleichheit mit ſich ſelbſt erzeugt wird, S. 11. 15. 16. ſo wiederum die Menge, durch ſucceſſive Verknüpfung der Einheit; und Menge involvirt alſo nur einen modificirten Begriff der Größe.

c. Da nun die Menge als eine Größe, einerley Entstehung mit jeder Größe haben muß, so ist, wenn man die sie gebende Einheit durch 1, und die Menge selbst durch m ausdrückt, also nach S. 15. $m = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$; und daher, wenn man das Vielfache, welches durch m Wiederholen erzeugt wird, durch m a ausdrückt; so ist das nächstfolgende Vielfache $= m\,a + a$. — Ist aber dieses, so muß nach S. 18. b. jedes Vielfache m a, das durch eine endliche Menge von a erzeugt wird, kleiner seyn, als das nächstfolgende $m\,a + a$, z. B. $a \prec a + a$; $a + a \prec a + a + a$ ꝛc. Denn, da hier die Wiederholungen von a, wenn m endlich ist, mit der Erzeugung von m a gänzlich aufhören; so kann durch dieselben gar nichts weiter erzeugt werden, folglich wird durch diejenigen Wiederholungen, welche m a erzeugen, $m\,a + a$ nicht erzeugt, also ist $m\,a \prec m\,a + a$.

Satz 20. Je nachdem nun so aus dem begränzten oder unbegränzten etliche male nehmen von a, daraus eine Größe b entsteht, welche als ein Vielfaches m a entweder begränzt, oder unbegränzt ist; so heisset nun a ein endlich oder unendlich vielster Theil von b. — S. 16.

Denn, wenn die Größe b entweder selbst ein Vielfaches m a ist, (S. 19.) das durch eine endliche Menge von a erzeugt wird, oder doch größer ist, als ein, durch irgend eine endliche Menge von a erzeugtes Vielfache m a, aber kleiner als das nächstfolgende Vielfache m a + a, so sagt man: *a* ist in *b* endlich viele male enthalten, S. 18. b. oder *a* ist ein endlichvielster Theil von *b*, S. 11. 12. 15. — 19. da, welcher Gestalt die Natur der Entstehung einer Größe, solcher auch ihr Wesen, sie also auch selbst seyn muß. Wenn nnn eine endliche Menge von a in ihrer Zusammensetzung die Größe b geben, und in dieser Zusammensetzung a ein Theil von b ist; so muß auch hier jedes a ein endlicher Theil von b seyn, weil eine endliche Menge von a die Größe b erzeugten.

Eben so, wie dagegen die Menge von a durch welche b erzeugt wird, unendlich; so sagt man: *a* ist in *b* unendlich viele mal enthalten, oder, *a* ist ein unendlichvielster Theil von *b*. Z. B. da $4 + 4 = 8$, ferner, $4 \prec 7$, aber $4 + 4 \succ 7$, imgleichen $4 + 4 \prec 10$, aber $4 + 4 + 4 \succ 10$; so heißt 4 ein endlichvielster Theil von 8. 7. 10.

Satz 21. Da nun zufolge S. 16. jedes Vielfache in dem Begriff seiner Unzertrenntheit eine Größe giebt, so entstehen also aus S. 19. und 20. endliche und unendliche Größen.

Eine Größe heißt demnach endlich, wenn sie völlig begränzt ist, und dagegen unendlich, wenn sich ihre Gränze von uns nicht bestimmen läßt. S. 12. e.

Der Satz ist für sich klar. Wir merken hier nur noch an, daß, so wie die Ausdrücke groß und klein, nach S. 11. c. d. nur etwas relatives bedeuten, eben so auch wenn die Größe eines Etwas unendlich groß oder klein genannt wird, dieses nur immer in Beziehung mit gleichartigen endlichen Größen stehe; und es heißt da eine Größe unendlich groß, wenn sie größer; unendlich klein, wenn sie kleiner, als jede gleichartige endliche Größe. Denn, da der Ausdruck unendlich in der Mathematik, S. 12. e. nur etwas relatives anzeigt; so muß also jede unendliche Größe immer nur in Beziehung gegen eine gleichartige endliche Größe stehen, und daher sonach immer entweder etwas unendlich großes, oder etwas unendlich kleines bezeichnen.

b. Da nun jede Größe sich nur durch gleichartiges erzeugen läßt, S. 11. c. u. 16. so kann durch das unendlich viele Wiederholen eines Maaßes a, nie eine endliche Größe b erzeuget werden. Denn da hier die Wiederholungen niemals aufhören; (S. 19.) so ist auch keine völlige Begränzung der Größe b möglich, und es kann also auf diese Weise eine endliche Größe b nicht er-

zeugt werden. — Ein unendlichvielster Theil einer endlichen Größe ist also kein Maaß von ihr, und mithin jedes Maaß, wodurch sich eine endliche Größe erzeugen läßt, allemal ein endlich vielster Theil solcher. S. 20.

Satz 22. Alle diese bis hieher angeführte Entstehungsgesetze und Ausdrücke für hypothetische Größe, gelten eigentlich nur von der eigenthümlichen Größe, die ein Etwas haben kann; da aber neben der eigenthümlichen Größe der Dinge auch noch ihre ihnen zukommende verhältnißmäßige Größe zu betrachten ist, S. 13. a. so müssen wir hier noch zu Ende dieses Abschnitts von deren Entstehung und Ausdruck anmerken, daß:

„Wenn zwo gleichartige Größen x und Z sich durch irgend ein gemeinschaftliches Maaß c erzeugen lassen; so heissen sie commensurable Größen, oder Rationalgrößen. Lassen sie sich dagegen durch kein gemeinschaftliches Maaß, das man von ihnen annehmen mag, erzeugen; so heissen sie incommensurable Größen, oder Irrationalgrößen.“

Der Begriff zwoer, oder mehrerer rationeller Größen faßt sonach seinem Wesen nach in sich; daß

beide aus einem gemeinschaftlichen Maaße (S. 11. c.) erzeugt seyn müssen, denn dadurch bestimmen sie sich als commensurable Größen, die sich einander, mit einander verglichen, genau eine aus der andern angeben lassen, und so aus einander das Verhältniß bestimmen, welches sie gegen einander haben, sie stehen dann so nach S. 12. a. zu einander in Verhältniß, sind rationelle Größen gegen einander, d. i. die eine erhält ihr Verhalten, — Bestehen — von der andern.

Die Entstehung dergleichen rationellen Größen aber, ist sich zu Folge ihres Begriffes vorzustellen: daß (nach S. 19.) m a (als der Ausdruck einer Menge von a) eine Größe c gäbe, welche in dieser Zusammensetzung als ein Vielfaches das Maaß von einer andern Größe x wäre, so daß also m c (als der Ausdruck einer Menge von c) = x wäre; wenn nun eben so wiederum m c + x, oder m c + m x (wiederum als Ausdrücke von einer Menge von c und x gebraucht) die Größe Z gäbe; so heissen die Größen x und Z in diesem Zusammenhange commensurable, oder rationelle Größen, denn sie haben beide die Größe c zu ihrer gemeinschaftlichen Mensur, oder Maaß, durch welches sie beide, eine gegen die andere, und zwar eine durch die andere genau ausgedrückt werden. Man nenne z. B. c = 2, x = 4, Z = 8, und a die Einheit; so entstehet aus m a, aus a + a (aus 1 + 1) = c = 2 für den Ausdruck eines Vielfachen. Die-

ses wiederum als Maaß eines andern Vielfachen m mal zu sich gesetzt, giebt z. E. c + c (2 + 2) = 4 für x, und wiederum c + c + x (2 + 2 + 4) = 8 für Z, oder auch c + c + x + x + x + x = 16 für Z; wo also hier das Vielfache 2 als ein Maaß c angenommen, und m mal gesetzt, sowohl x = 4, als Z = 8 oder = 16 ꝛc. gab, und 4 und 8, oder 4 und 16, und jede aus m c erzeugte Größe v sind in dieser Vergleichung gegen einander rationelle, eine durch die andere commensurable Größen.

NB. Man sieht hier, daß nothwendig jede Größe c, als ein Maaß von rationellen Größen gebraucht, ein Vielfaches, S. 15. 16. 17. seyn muß, das als der Inbegriff einer Menge Einheiten a in ihrer Ungetrenntheit als eine Einheit wiederum gebraucht (S. 19.) ist, weil Eins für sich gesetzt keine weitere Vergleichung ausdrückt noch giebt, da die strenge Einheit immer das Maaß von sich selbst, und jeder Größe und Menge ist. S. 19. b.

Ferner sehen wir aus dem Begriff und der Entstehung rationeller Größen, daß das sie gebende gemeinschaftliche Maaß c ein Aliquotum von beiden, sowohl von x als Z seyn muß, x und Z nemlich als Ganze ihrer Art betrachtet. S. 16. 17. b. c.

Weiter, da nun so x als eine rationelle Größe zu c, von m c gemessen wird, daß x = m c und umgekehrt, nemlich daß c, m mal gesetzt, die Größe x giebt; so ist also x selbst wiederum ein aus einem Vielfachen (wie c erwiesen an sich seyn muß) zusammengesetztes Vielfache, denn es bestehet aus m mal genommenen c, ist gleich m c, und es heißt daher in dieser Vergleichung jede rationelle Größe eine zusammengesetzte, eine solche, die nicht aus der bloß m maligen Setzung der Einheit, sondern aus der m maligen Setzung eines nur als Einheit in ihr angenommenen, für sich aber bestehenden Vielfachen zusammengesetzt ist..

b. Daher, setzet man dagegen zwo Größen v und w, wovon die eine, ein aus aliquoten, die andere ein aus aliquanten Theilen bestehendes Ganze ausdrückt, (S. 16.) daß z. E. v = m c (als den Ausdruck einer Menge von c) aber w dagegen = m c + b, oder beide Aliquanta von c sind; so wird keine von diesen beiden Größen durch die andere genau gemessen, indem immer noch ein + b, oder + c übrig bleibet, welches kein Maaß der andern seyn wird. Wie nun Aliquota und Aliquanta Ausdrücke von verschiedenen Wievielen bezeichnen; so geben sie demnach zu einander kein Verhältniß, es kann das Verhalten, — Bestehen — der einen, durch die andere nicht erzeugt, nicht bestimmt werden,

und dergleichen Größe also, wie v und w, wovon die eine ein Aliquotum, die andere aber ein Aliquantum von irgend einer Einheit c (als Inbegriff eines Vielfachen gesetzt) ist, heissen im Gegentheil von S. a incommensurable, surde, oder Irrationalgrößen.

Setzen wir z. B. in Zahlen, v = 5, w = 6, so ist, wenn c = 2 bedeutet, v = c + c + b, (d. i. = 2 + 2 + 1) dagegen w = c + c + c, (d. i. = 2 + 2 + 2) und es bleibt also hier in der Größe w ein + c übrig, welches durch den einen Theil + b, in der Größe v nicht gemessen wird, eben so wenig wie durch m malige Wiederholung von c + c + b die Größe w, hier = c + c + c nach S. 16. b. nie wird erzeugt werden können.

Eben so wenn v = 5, und w = 9, zwey Aliquanta von c = 2 ausdrückten, daß wäre v = c + c + b, und w = c + c + c + c + b, wo in der Größe w übrig bleiben c + c die von der Größe v, solche als ein Ganzes angenommen nicht gemessen, nie in ihrer m maligen Wiederholung der Größe w (hier = c + c + c + c + b) gleich werden würden.

Aus dem Begriff und den Gesetzen der Entstehung rationeller und irrationeller Größen ergeben sich weiter für solche als Gesetze:

α) Zwo gleiche Größen sind rationelle Größen.

Denn, jedes Maaß der einen ist, nach dem Begriff der Gleichheit, in der andern gleich so viele male enthalten, als in ihr selbst, und also auch ein Maaß der andern, S. 18. und

„sonach sind jede zwo irrationelle Größen jedesmal „ungleich“

β) Wenn von zwoen Größen x, Z, die eine ein Maaß der andern ist; so sind sie rationelle Größen.

Denn, wenn x ein Maaß von Z ist; so ist auch jedes Maaß a von x, selbst ein Maaß von Z, S. 18. a; und daher:

„kann von zween Irrationalgrößen keine ein Maaß „der andern seyn.

Satz 23. Es bestehet die Möglichkeit, daß zwo gleichartige endliche Größen, Irrationalgrößen seyn können.

Denn, man nehme von einer Größe b irgend ein Maaß c an (S. 22.) und setze c sey zugleich ein Maaß auch von einer andern Größe a, und kleiner als a, eine andere p aber sey wiederum noch kleiner als c; so ist c (nach S. 18. c.) kein Maaß von a + p; folglich läßt sich, wofern p kleiner ist, als jedes

Maaß c, das man von b annehmen mag, kein gemeinschaftliches Maaß von b, und a (a + p) annehmen, also sind in diesem Falle die Größen b und (a + p) Irrationalgrößen. Nun aber läßt sich allerdings eine Größe p denken, die kleiner ist als jedes Maaß c, das man von b annehmen mag; S. 8. und also kann es zwo Größen b und (a + p) geben, welche Irrationalgrößen sind.

Satz 24. Das Wieviele oder die Größe eines Etwas bestimmen, heißt überhaupt, solches messen. Man kann aber eine Größe b von einer Sache nicht anders als aus der Vergleichung mit einer andern gleichartigen Größe a, die man zum Maaß von b angenommen, bestimmen; (S. 11.) wenn daher die zu messende Größe b. und die zu ihrem Maaß angenommene a, rationelle Größen sind; (S. 22.) so wird b durch a genau gemessen; sind b und a dagegen irrationell, so kann b durch a nie genau bestimmt, oder gemessen werden.

Will und kann der Ausdruck messen, nichts anders, als die Bestimmnng des hypothetisch Wievielen eines Etwas ausdrücken; so heißt also (nach den S. 11. vorgetragenen Lehren von der Erkenntniß aller hypothetischen Größe) die Größe b eines Etwas messen, weiter nichts, als: eine gleichartige Größe a als

Maaß von b annehmen, und nun vergleichen, wie oft a genommen werden muß, um die Größe b zu erzeugen. Von zween ungleichen Größen, denn gleiche Größen sind sich selbst das Maaß, S. 22. α, mißt also die eine die andere, wenn die, welche man zum Maaß annimmt, einige male genommen, der Gemessenen gleich wird, so wird b durch a gemessen, wenn b, m mal genommen, oder m mal b = a giebt, und b heißt nun ein Maaß von a. — Trift es sich, daß b nicht nur ein Maaß von a, sondern von mehrern Größen e. f. g. ꝛc. ist; so heißt b alsdann das gemeinschaftliche Maaß dieser Größen. Man vergleiche hiermit S. 15. 16. u. 17. 22. NB.

a. Will man b durch a genau messen; so muß man nach S. 11. c. u. S. 16. es als einen aliquoten Theil von b angenommen haben. — Eben so wenn b und a für sich gesetzt, Rationalgrößen bezeichnen; so läßt sich hier entweder b durch das Maaß a selbst, oder durch irgend einen aliquoten Theil desselben genau messen. S. 22. a.

b. Ist dagegen das Maaß b ein aliquanter Theil von b, (S. 16.) oder verhalten sich b, a als irrationelle Größen; so läßt sich (S. 22. b.) b weder durch a selbst, noch durch irgend einen angenommenen aliquoten Theil von a genau messen. Doch läßt sich in diesem Fall die wahre Größe von b immer genauer finden, je kleiner man das Maaß a selbst, oder einen

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

aliquoten Theil von solchem annimmt, weil alsdann das fehlende immer weniger als ein ganzes a betragen muß, da ein ganzes a ja schon einen bestimmten Ausdruck für b erzeugt.

c. Wird b durch a gemessen, so enthält b das ganze a entweder ein oder etliche mal genau; (S. 15. 16.) oder nicht. Ist letzterer Fall, so heißt in dieser Vergleichung (S. 12. d. 13 c.) b ein Bruch von a; so wie im erstern dagegen b ein Ganzes heißt. S. 12. a.

β) Da nun, wenn a ein aliquanter Theil von b; oder wenn an sich a, b irrationelle Größen sind, nach S. b. niemals a genau in b enthalten seyn kann; so muß unter diesen Umständen b jedesmal ein Bruch von a seyn.

Der erhaltene Bruch b/a wird sich rücksichts des Ausdrucks seines Wievielen genau bestimmen lassen, wenn a ein aliquoter Theil von b, oder a, b an sich rationelle Größen waren, und nun das an dem Ganzen fehlende wiederum ein Aliquotum von a ist, ist dieses aber nicht; so läßt sich der Bruch b/a nie genau bestimmen, und heißt alsdann im Gegensatz der zusammengesetzten Größe, S. 22. NB. eine Primgröße, d. i. ein Wievieles, das sich mit keiner aliquoten Zusammensetzung, sondern blos mit seiner Einheit vergleichen, und aus solcher erzeugen läßt. Dergleichen also alle Aliquanta, und alle irrationelle Grö-

ßen nach dem Begriff ihres Wesens und ihrer Entstehung sind. — Daher wird nach S. c. β. wenn a ein Aliquantum von b, oder a, b an sich irrationell sind, der Bruch b/a jedesmal eine Primgröße seyn, gleich dem Wesen seiner Entstehung.

Satz 25. Die Benennung des gemessenen, oder bestimmten Wievielen eines Etwas, heißt: solches zählen, und giebt die Zahl, für deren Bild man die Ziffer setzt, S. 12. c. Je nachdem nun die Zahl als die Benennung einer rationellen oder irrationellen Größe stehet, (S. 22.) heißt auch sie, als adequater Ausdruck der Sache für deren Benennung sie stehet, eine rationelle oder irrationelle Zahl, im letztern Falle auch eine Primzahl; so wie im erstern eine zusammengesetzte.

Obgleich also an sich die Zahl keine Größe ist; so läßt und muß sich dennoch eine jede Zahl als eine Größe betrachten lassen, in wieferne man nemlich die Benennung einer Sache, und diese selbst einander substituiren kann; und da, wo die Benennung der Sache steht, diese auch selbst angenommen werden muß.

Ferner, da man eine Sache nicht anders als durch ihre Benennung bestimmen kann; so ist also auch keine Größenmessung, oder Bestimmung anders, als ver-

mittelst der Zahlen möglich, und alle Größenmessung beruht also auf Arithmetik, S. 10. — 12. welche daher auch nur die eigentliche Mathematik in sich begreift, in wieferne nemlich dieser Hauptobject die Messung der Größen ist: und jedes gemessene und benannte Wieviele heißt also eine gezählte Größe.

Zweeten Theiles.

II. Abschnitt.

Allgemeine Gesetze und Ausdrücke für die Größe selbst.

Satz 20. Größen heissen gleiche, wenn sie (nach S. 11. a. u. S. 18. a.) ein Wievieles von nemlichen Wesen und Bestimmung begreifen, d. i. wenn sie einerley Wievieles, ein und dasselbe Wieviele begreifen, — und dergleichen Größen lassen sich substituiren, d. i. eine für die andere setzen.

Wenn A ein und dasselbe Wieviele, ein Wievieles von gleichen Wesen und Bestimmungen wie B begreift; so sind also A = B, und es ist gleichviel, welche man von beiden Größen nimmt, ob man A oder B habe, da A = B, man kann also eine der andern substituiren. Ist 1 ℔ = 32 Loth, so ist es hier gleichviel, ob man 1 ℔ oder 32 Loth habe. Es ist

einerley, — es ist eines und dasselbe, d. i. es ist gleich, gleichviel.

Satz 27. Jede Größe ist sich selbst gleich, d. i. sie ist einerley mit dem Wesen und der Bestimmung desjenigen Wievielen, dessen Inbegriff sie ist, und für dessen Angabe sie als eine Zahl gesetzt ist. (S. 2. 11. a. 12. b. 15. 16. 17.)

Wenn also die Größe A für ein Wievieles = A gebraucht wird; so muß nothwendig A = A seyn, und es kann A nie zugleich auch einem andern Wievielen = B seyn, indem dies ja sonst einen Widerspruch in sich selbst faßte. (S. 1. e.) Es fließt dieser Grundsatz aus dem Wesen der Größe, nach welchem, (zu Folge S. 4.) jedes Würkliche nur eine Größe haben kann.

Daraus leitet sich ein anderes Gesetz ab:

a. Wenn zwo Größen einer dritten gleich; so sind sie unter sich selbst gleich.

Denn wenn A = B, und B = C; so ist auch A ebensowohl = C, als wie C = A ist. (Siehe L. d. R. Seite 15.)

Dieses abgeleitete Gesetz drückt man auch also aus:

„Wenn von mehrern Größen, eine jede eben der„selben gleich ist, so sind sie einander selbst gleich“ d. i. wenn $a = x$, $b = x$, $c = x$ ꝛc. so ist $a = b = c$ ꝛc. Denn da $b = x$, und $c = x$; so läßt sich im Satze $a = x$, statt x sowohl b als c; und im Satze $b = x$, statt x gleichfalls c setzen. (S. 26.)

Satz 28. Eine jede Größe, die als ein Ganzes genommen wird, ist in dieser Vergleichung der Inbegriff eines Gleichvielen mit allen seinen Theilen zusammen; und umgekehrt also: Größen, die in Vergleichung als Theile einer andern Größe, die man für ihr Ganzes setzt, genommen werden, geben alle zusammen genommen den Inbegriff eines Gleichvielen mit diesem ihrem Ganzen, von dem sie als Theile gelten.

Wenn also nach S. 11. c. $a + a + a + a \ldots$ zusammen alle Theile von Z sind, und in dieser Vergleichung nach S. 12. a. S. 16. 17. u. 24. Z ein Ganzes, und $a + a + a + a \ldots$ dessen Theile heissen; so ist sonach $Z = a + a + a + a \ldots$, und umgekehrt. Beide Ausdrücke bezeichnen sonach ein Wievieles von einerley Wesen und Bestimmung, lassen sich also in der Eigenschaft eines Wievielen (S. 26.) einander substituiren, d. i. sie sind einander gleich.

Denn nach den S. 12. a. S. 16. 17. und 24. gegebenen und erläuterten Begriffen vom Ganzen und Theil, müssen nothwendig, das Ganze, das in dieser Vergleichung zu seinen Theilen, als der Inbegriff einer hypothetischen Einheit stehet, S. 6. alle seine Theile zusammen in sich begreifen, als seine wesentliche Stücke, um in dieser Vergleichung eine Einheit dieses Wesens auszudrücken, — um ein Ganzes zu geben, S. 17. b. e. — d. i. Z muß ein und dasselbe Wieviele ausdrücken in dieser Vergleichung als a + a + a + a + a . . ., als diese seine wesentlich zu Einem verbundene Stücke geben: —

und eben so umgekehrt: sind a + a + a + a + a . . . zusammen alle die wesentliche Stücke, die in dieser Vergleichung, in ihrer Zusammensetzung zu Einem, die Einheit Z zu ihrem Ganzen, zu ihrer hypothetischen Unzertrenntheit geben; so müssen sie nothwendig alle zusammen, ein Gleichvieles mit Z, ihrem Ganzen selbst geben, weil es widersprechend wäre, wenn in der Verbindung der wesentlichen Stücke zum Wesen der Sache, in dem Wesen, oder der Verbindung der wesentlichen Stücke etwas läge, das nicht von beiden gälte. Die Größe würde sich ja sonst (S. 17.) nicht mehr selbst gleich seyn. L. d. R. Seite 14 u. 15.

Hieraus leiten sich nun folgende Grundsätze:

a. Das Ganze ist größer als jeder Theil desselben alleine; oder auch als einige Theile solches alleine genommen.

Denn, wenn nach dem Begriff und Wesen der Entstehung eines Ganzen Z, (S. 12. a. S. 16. 17. 24.) in ihrer ungetrennten Verbindung a + a + a + a = Z, als ihrem Ganzen sind; so muß in dieser Vergleichung, nach S. 11. d. und S. 18. b. nothwendig Z > a, und auch muß Z > a + a + a, weil Z als der Inbegriff nicht von einer Einheit a, auch nicht von drey Einheiten a, sondern von vier Einheiten gleich dem Wesen und Bestimmung von a angenommen worden. Das Ganze ist also größer, als ein oder nur etliche Theile von ihm, d. h. dasjenige Wieviele, für dessen Ausdruck das Ganze stehet, enthält in Vergleichung mehr dergleichen Wievieles, als der Ausdruck desjenigen Wievielen anzeiget, das man in dieser Vergleichung nur als einen Theil, oder als einige Theile seiner setzet. L. d. R. Seite 15.

Eben so daher umgekehrt der Grundsatz:

b. Ein, oder nur einige Theile eines Ganzen sind kleiner als das Ganze" d. i. der Ausdruck, welcher für das Wieviele a stehet, welches man in Vergleichung nur einen, oder einige Theile von einem andern Wievielen Z nennt, enthält seinem Wesen nach in dieser Vergleichung ein weniger Wievieles, als das

für das Ganze gesetzte Z. Giebt a ✢ a ✢ a ✢ a = Z; so ist a ≺ Z, auch ist a ✢ a ✢ a ≺ Z, denn in Z sind, als in einer Unzertrenntheit (Einheit S. 6.) in Vergleichung mit a vier a enthalten, da a dagegen nur einmal a, und a ✢ a ✢ a nur drey dergleichen Einheiten ausdrückt. (s. d. R. Seite 15.)

Aus a und b fließt daher als drittes abgeleitetes Gesetz:

c. Das Größere schließt nothwendig das Kleinere in sich:

d. i. wenn Z = a ✢ a ✢ a ✢ a, und für ein anderes Wieviele gleicher Art, stehet B = a ✢ a; so ist nothwendig B ≺ Z, (nach S. a. und b.) und es ist sonach in der Vergleichung zu Z, als ein, oder einige Theile von diesem anzusehen, und es ist also, in dieser Vergleichung, in diesem, als der Theil in seinem Ganzen begriffen. Undenkbar ist die Zahl 4, ohne zugleich die Zahl 2 mit darunter zu begreifen.

Satz 29. Was größer oder kleiner ist als eine von zwoen gleichen Größen, das ist auch größer oder kleiner als die andere.

D. i. Setzet man zwo gleiche Größen, (S. 26.) A = B, und zu diesen eine ungleiche C, — ein Wievieles von ungleichen Wesen und Bestimmung von A

und B; so muß, wenn C ungleich B, es auch ungleich A seyn, denn anders würden A und B nicht mehr gleich seyn können. Da nun ferner (nach S. 18. b.) von zwoen ungleichen Größen nothwendig die eine größer, die andere dagegen kleiner seyn muß; so ergiebt sich sonach, wenn

$$A = B,$$

und $C \succ B$ daß auch

$C \succ A$ seyn müsse; oder wenn

$$A = B$$

und $C \prec A$, daß auch

$C \prec B$ seyn müsse. (Siehe L. d. R. Seite 15.) Denn in dem Satze $C \succ B$, oder $C \prec B$ kann man, weil A und B gleiche Größen bezeichnen, also nach S. 26. für B auch jedesmal A, und umgekehrt setzen.

Mit diesem Grundsatz hängt nun auch folgender zusammen:

Satz 30. Was größer ist als die größere von zwoen ungleichen Größen, ist um so mehr auch größer als die kleinere: und so umgekehrt.

D. i. Setzet man zwo ungleiche Größen, S. 18. daß also die eine davon größer als die andere, d. i. mehrere dergleichen zum Maaß angenommene gleiche Einheiten, als die andere in Vergleichung dagegen

enthalte; so muß, wenn man zu diesen zwo ungleichen Größen, noch eine dritte, jenen beiden ungleiche setzt, diese dritte, wenn sie wiederum größer als die größere von den beiden ersten, nothwendig auch größer, als die kleinere davon seyn, und umgekehrt, denn anders sie sich selbsten nicht mehr gleich seyn könnten. (S. 27.)

Wenn also $A \succeq B$,
und $B \succeq C$ so ist auch

$A \succeq C$;

oder wenn $A \succ B$
und $B \succ C$ so ist auch

$A \succ C$.

Es läßt sich dieser Satz intuitiv also demonstriren.

1) Was dessen ersten Theil betrift: Wenn $A \succeq B$, und $B \succeq C$; so ist auch $A \succeq C$; da nach S. 28. c. das Kleinere jedesmal in dem Größern enthalten ist, und als ein Theil von solchem anzusehen; so ist also B ein Theil von A, so wie wiederum C ein Theil von B, und mithin ist, so wie B in A als der Theil in seinem Ganzen, so auch wiederum C in B enthalten, und C das $\prec$ B und demnach als ein Theil von B angesehen werden kann, muß daher eben als ein solcher auch wiederum von A gelten, da auch $B \prec A$, und es selbsten wiederum nur erst ein Theil von A ist. Es ist also $A \eqcirc B + d$, und $B \eqcirc C + e$, da, nach S. 17. wenn a ein Theil von g, es allemal einen Nebentheil d geben muß, der mit a zusammen der Größe g als

ihrem Ganzen (S. 28.) gleich ist, folglich ist A = C + e + d, und zu Folge S. 17. sonach C ein Theil von A. Nun aber ist nicht C = A, denn sonst wäre, da B ≺ A (per hypoth.) (laut S. 29.) B ≺ C, da doch B ≽ C seyn soll. Also ist A ≽ C nach S. 18. b.

2) Eben so läßt sich nun umgekehrt die intuitive Demonstration des zweeten Theils dieses Satzes führen, daß nemlich wenn A ≺ B, und B ≺ C; also auch A ≺ C sey. Denn muß nach S. 28. c. das Kleinere nothwendig jedesmal in dem Größern, als der Theil in seinem Ganzen enthalten seyn; so muß also auch, wenn A ≺ B, A in B enthalten seyn; so wie wenn selbst wiederum B ≺ C, dieses nicht nur selbst wiederum in C enthalten seyn muß, sondern eben so auch das in ihm enthaltene A, da, wo das Ganze enthalten, es auch dessen Theile seyn müssen. Es ist demnach umgekehrt nach S. 30. 1. vorher A = B — d, und B = C — e, und folglich A = C — e — d, und sonach A ein Theil von C. Nun aber ist nicht C = A, denn sonst wäre, da (per hypoth.) B ≽ A, auch B ≽ C, da doch B ≺ C seyn soll. Also ist A ≽ C. Vergleiche S. 18. b.

Oder man kann auch diesen zweeten Theil unsers Satzes ganz nach dem ersten Theil umgekehrt also demonstriren: wenn C ≽ B, und B ≽ A; so ist auch C ≽ A, also A ≺ C.

Aus diesem Gesetze, das wir so eben in unserm 30. Satz aufgestellet haben, fließen noch folgende zwo unmittelbar abgeleitete Gesetze.

a) Wenn eine Größe c kleiner ist, als ein Theil a des Ganzen b ✢ a; so ist sie auch kleiner als das Ganze b ✢ a selbst.

Denn da a als ein Theil von b ✢ a (S. 28. b.) nicht größer als dieses sein Ganzes, also nie a ≻ b ✢ a seyn kann, so muß nun nach S. 18. b seyn entweder a ≍ b ✢ a, oder es muß seyn a ≺ b ✢ a. In beiden diesen Fällen nun aber ist immer c ≺ b ✢ a; denn setzte man a ≍ b ✢ a; so ist nach S. 29. weil c ≺ a, auch c ≺ b ✢ a; und setzt man a ≺ b ✢ a, so ist nach S. 30. ebenfalls c ≺ b ✢ a.

b) Wenn b ≻ a, und c ein aliquoter Theil von a ist; so ist b ≻ c ✢ c.

Denn da angenommen c ein aliquoter Theil von a ist; so ist nach der Natur eines aus aliquoten Theilen bestehenden Ganzen S. 16. entweder nothwendig a ≍ c ✢ c, oder a ≍ c ✢ c ✢ c, oder a ≍ c ✢ c ✢ c ✢ c ✢ c ꝛc. da nun angenommen b ≻ a; so ist in allen Fällen auch b ≻ c ✢ c. (S. 29. u. 30.)

Einschaltung. Intuitive Demonstration des S. 28. a. und b. aufgestellten Gesetzes: daß das

Ganze größer sey als einer oder nur einige seiner Theile alleine genommen, und umgekehrt.

Von diesem Satze, welchen wir oben am angeführten Orte als ein Axiom, oder als ein Grundgesetz für die Größe eines Etwas, die man ein Ganzes nennt a priori aus der Entstehung und den Begriffen vom Ganzen und Theil erwiesen haben, läßt sich nach den S. 29. u. 30. erhärteten allgemeinen Gesetzen für Größer- und Kleinerseyn, noch folgende intuitive Demonstration geben. Nemlich:

Wenn ein Theil b des Ganzen b ✢ a entweder seinem Nebentheil a gleich, oder dieser ein endlichvielster Theil von jenem ist, so ist jeder von den Theilen kleiner als das Ganze, und das Ganze größer als jeder seiner Theile.

Denn, wenn b = a, so sind nach (S. 26.) b und a gleiche Größen, und lassen sich als solche substituiren, hier also als gleiche Theile von einem Ganzen = b ✢ a genommen, lassen sich sonach auch dafür setzen = a ✢ a = b ✢ b = b ✢ a. Da nun nach dem Entstehungsgesetz S. 18. b des Größer- und Kleinerseyns a ≺ a ✢ a und b ≺ b ✢ b; so ist also nach dem Gesetze des Größer- und Kleinerseyns S. 29, auch theils b ≺ b ✢ a, oder a ≺ b ✢ a.

Ist hingegen nicht b = a, und a ein endlichvielster Theil von b, so ist nach (S. 18. b.) a ≺ b, also erstlich (zu Folge S. 30. a.) ist a ≺ b + a. Ferner giebt es, nach den Begriffen und der Entstehung vom Vielfachen und einer endlichen Menge S. 19. c. u. S. 20. eine solche endliche Menge m von a, daß entweder b = m a, oder b ≻ m a, aber b ≺ m a + a ist. Allein wenn b = m a; so ist (nach S. 26.) b + a = m a + a. Da nun (zu Folge S. 19. c.) m a ≺ m a + a; so ist auch b ≺ m a + a, (S. 29.) also b ≺ b + a. (S. 29.) Ist hingegen b ≻ m a, und b ≺ m a + a; so ist (nach S. 18. b.) m a ein Theil von b, folglich (laut S. 17. da wenn a ein Theil von g, es allemal einen Nebentheil d giebt, der a + d = g) b = m a + p, mithin (nach S. 26.) b + a = m a + p + a. Da nun b ≺ m a + a erwiesen; so ist b ≺ m a + p + a nach S. 30. a.; folglich wiederum b ≺ b + a nach S. 29. Also ist in allen Fällen, nicht nur a ≺ b + a, sondern auch b ≺ b + a.

Sonach ist bey endlichen Größen der Theil allemal kleiner, als das Ganze; und das Ganze größer, als sein Theil; d. i. hier ist beständig a ≺ b + a; und b ≺ b + a.

Denn, hier ist entweder der eine Theil seinem Nebentheile gleich, oder der eine ist kleiner als der andere, nach S. 18. Im erstern Fall ist der Satz als richtig hier demonstrirt worden; und im letztern Falle

ist nach S. 18. b. der eine Theil selbst wiederum ein Theil vom andern Theile, und zwar ein endlichvielster; (S. 20.) also besteht auch hier die Richtigkeit unserer gegebenen Demonstration.

Anmerk. Der Satz: das Ganze ist größer als einer oder nur etliche seiner Theile, und umgekehrt, — ist also als ein allgemeines Gesetz von allen endlichen Größen demonstrirt, hier u. S. 28. aber wohl zu merken, nur von endlichen Größen; denn unrichtig ist er in Anwendung auf unendliche Größen, bey diesen ist jeder Theil, dessen Nebentheil nur ein unendlich vielster Theil von ihm ist, dem Ganzen gleich S. 20. Nur unter der Einschränkung gilt unser Satz als ein Gesetz auch für unendliche Größe, wenn von dem Theile eines unendlich Ganzen die Rede, dessen Nebentheil entweder ihm gleich, oder ein endlichvielster Theil von ihm ist. Es kommt also nur aus seiner Unbekanntschaft mit der Theorie des unendlich Großen, daß Euclides diesen unsern Satz als ein ganz allgemeines Axiom, ohne alle Einschränkung aufgestellt hat. Man vergleiche Joh. Schulz: Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen.

Zweeten Theiles
III. Abschnitt.

Allgemeine Gesetze für Größenmodificationen.

Von den allgemeinen Gesetzen für die Größe eines Etwas selbst, kommen wir nun zu den allgemeinen für Größenmodificationen. Daß jede hypothetische Größe gewisser Modificationen fähig sey, und werden könne, haben wir schon oben S. 8. c. als wesentliche Bestimmung solcher, aus ihrem Wesen erwiesen; so wie sich dieses auch noch aus dem Wege, wie wir nur zur Erkenntniß ihrer gelangen, und sie von einem Etwas angeben können, aus S. 11. demonstriret.

Satz 31. Die allgemeinen Gesetze für Größenmodificationen aber, können keine andere als nur abgeleitete, aus den bisher angeführten allgemeinsten Gesetzen für Größe selbsten und Größenentstehung, seyn.

Da in der Modification der Größe keine Bestimmung liegen kann, welche nicht schon in der Größe, als der Sache selbst läge.

NB. Da man nun die Modificirung der Größe, — daß man mit ihr verschiedene Veränderungen vornimmt — auch sonst das Arithmetische Verfahren, zu teutsch rechnen nennt; so enthält demnach dieser dritte Abschnitt die allgemeinen Gesetze für das Rechnen, oder Arithmetische Verfahren.

Satz 32. Da nun aus beiden, sowohl aus dem Wesen, als dem Wege der Erkenntniß und Angabe (S. 8. u. 11.) einer hypothetischen Größe, sich nur Vermehrung, oder Verminderung ihrer, als die einzigen Modificationen solcher denken lassen; so sind demnach Addition und Subtraction an sich betrachtet die einzigen und allgemeinsten Größenmodificationen.

Denn, da in den Modificationen einer Sache nichts enthalten seyn kann, was nicht in dem Wesen der Sache selbst liegt, und diesem nicht widersprechend erscheint; so können also auch nur Vermehrung oder Verminderung, die einzigen Modificationen eines Wievielen, nach dem Wesen desselben seyn. S. 8. u. 11.

Satz 33. Ein Wievieles wird vermehrt, wenn man nach S. 12. e. noch immer Wievieles seiner Art, (also Einheiten S. 6.) darzusetzt, und nun das neu entstandene Wievielc wiederum als ein Wievieles, — als Eins in einem Ganzen (S. 12. a.) betrachtet. Addiren heißt demnach: einige gegebene Wieviele als die gesammten Theile eines Ganzen ansehen, (S. 12. b. 24. c. 17. b. e.) und sie nun als ein solches in der Einheit ausdrücken. (S. 6. 17. a. in Vergleichung mit S. 28. a.)

Größen addiren, oder zusammensetzen heißt: einzelne Größen, die man schon als eigenthümliche Ganze ihrer Art angenommen hat, wenn sie auch selbst in Vergleichung als Brüche wären ausgedrückt gewesen, (S. 12. d.) so an einander fügen, daß daraus eine neue Zahl, als Benennung einer neuen Einheit, eines neuen Wievielen entstehet, das als ein Ganzes alle die gegebenen Wieviele als seine es gebenden Theile einschließt. (S. 28. a.) Als wenn man aus

$$\frac{e}{f} \quad \text{und}$$

$$\frac{e}{f}$$

machte $e \dotplus f$.

Diese einzelne eigenthümliche Ganze, z. E. hier e, f, welche die neue Zahl geben, heissen in dieser

Verbindung zur Darstellung solcher neuen Zahl, die Summanden, oder Aggreganden, so wie diese selbst nun dagegen die Summe, oder das Aggregat heisset, und ausgedrückt wird durch die gesetzten Einheiten seiner es gebenden Aggreganden, also hier durch e + f, es heißt die Summe von e + f = e + f.

Oder denkt man sich e, f als bestimmte Zahlen, so wird die Summe ebenfalls bestimmt, und es heißt alsdann e + f = Z. (6 + 4 = 10.)

Eine ganze Zahl (S. 17. f.) z. B. 3, wird also zu einer andern, z. B. zu 24 addirt, wenn man nach und nach die Einer, die jene enthält, zu dieser zusetzet. Denn, da 3 = 1 + 1 + 1; so ist also 24 + 3 = 24 + 1 + 1 + 1: und sonach ist eine jede Summe ganzer Zahlen selbst auch eine ganze Zahl. S. 17. f.

NB. Doch sind nach dem Begriff vom Ganzen und Theil S. 12. a. Ganze und Aggregate, so wie auch Theile und Aggreganden nicht einerley, sondern an sich, (ausser dieser Vergleichung) wesentlich verschieden. Das Ganze ist der Inbegriff einer Unzertrenntheit seiner in ihm vereint angenommenen hypothetischen Einheiten, als seiner Theile zu Einem; nur einen Theil also von ihm hinweggenommen; so ist diese Unzertrenntheit gebrochen, und man hat in dieser Vergleichung einen Bruch, (S. 12. d. 13. c.) aber nicht mehr das Ganze, denn die Größe ist nicht mehr

sich selbst gleich. S. 27. Dagegen steht das Aggregat als eine Zahl, die für die Benennung einer Einheit angenommen ist, die als ein Inbegriff von mehrern eigenthümlichen Ganzen selbst stehet, wenn also von ihm auch gleich eines, oder einige seiner Aggreganden weggenommen werden, bleibt es deswegen immer noch ein Aggregat. Das Ganze A = a + a + a + a ist nicht mehr gleich A wenn man es nur + a + a setzen wollte, sondern es ist alsdann $= \frac{a + a}{a + a + a + a}$ dagegen ist e + f eben sowohl noch ein Aggregat als e + f + c.

Man könnte also sagen, daß das eigenthümliche Ganze sich zum Aggregat verhalte, wie die Einheit zu ihrem Zusammengesetzten. (S. 15. 16. u. 17.) Denn e alleine gesetzt, bezeichnet für sich ein Ganzes, nicht aber ein Aggregat; soll dieses entstehen, so müssen wenigstens zwo Größen gesetzt werden, nur erst der Ausdruck e + f giebt dasjenige Ganze, das man ein Aggregat nennt.

Doch da nun aber das Ganze aus seinen Theilen, das Aggregat aus seinen Aggreganden bestehet; so hat es mit ihnen also die nemliche Beschaffenheit, wie mit den von ihnen gegebenen Ganzen und Aggregaten: und es sind demnach in Vergleichung freylich das Aggregat wie ein Ganzes, und seine Aggreganden wie

dessen es gebende Theile anzusehen, obgleich eigentlich genommen, dem nicht also ist.

Daher: betrachtet man ein Aggregat als ein Ganzes; so nennt man es eine complexe (zusammengesetzte) Grösse, im Gegensatz eines einfachen, in seiner Einheit schlechthin gesetzten eigentlichen Ganzen, (S. 19.) so wie die es gebende einzelne Ganze deren Glieder, Sätze, oder auch wohl, aber uneigentlich, Theile heissen.

Das Resultat dieser NB. ist demnach:

Die Aggreganden sind hier an sich betrachtet selbst Ganze, (S. 12. a.) und drücken als solche für sich selbst schon ein Vielfaches aus, (S. 15. u. 16.) die nun nur als ein solches genommen, als Ganze an sich schon betrachtet (nach S. 19.) in der Einheit gesetzt sind, und die nun in ihrer Zusammensetzung eine Menge geben, (S. 19. b.) deren allgemeiner Ausdruck das Aggregat ist, welches also nun ein Vielfaches aus Vielfachen ist, die es in einer Einheit, zu einem Ganzen in sich wiederum vereint. Man kann sonach das Aggregat den Inbegriff, (oder den Ausdruck) der Menge verschiedener in ihrer Einheit gesetzter Vielfachen, (oder Ganzen) nennen.

Sonach: nennt man die Summe ein Ganzes; so ist dieses zu Folge S. 12. b. 24. c. nach dem Begriff von einem Ganzen überhaupt, nur ein Verglei-

chungsbegriff, hier nemlich gegen die Aggreganden, die man in Vergleichung zu der Summe, als alle ihre Theile ansiehet. Eben so ist es daher nach angef. Orte nur in Vergleichung zu verstehen: wenn man die Aggreganden Theile nennt, nemlich hier in Beziehung auf ihre gebende Summe.

Anmerk. Aus der Gleichheit jeder Größe mit sich selbst, (S. 27.) folgt: daß die Ordnung in welcher man die gleichartigen Aggreganden setzet, in deren Werthe an sich, und in deren Aggregat nichts verändern können, ob man setze e + f, oder f + e. (5 + 3 = 3 + 5)

Anmerk. 2. Setzet man für die allgemeinen algebraischen Ausdrücke bestimmte durch Ziffern bezeichnete Zahlen; so erhält das Aggregat ebenfalls seinen bestimmt bezeichneten Ausdruck, und man sagt nun z. E. e + f + g = d, welches heißt, d ist die Summe der Größen e, f, g, und diese sind ihre Summanden.

Satz 34. Nur gleichartige Größen, d. i. solche, die einer Beschaffenheit, Natur und Wesens sind, lassen sich addiren, und so unter eine Summe bringen, d. i. als eine Einheit ausdrücken. (S. 33.)

Denn nach dem Begriff der Addition (S. 33.) will der Ausdruck e + f nichts weiter sagen, als daß

man (nach S. 24. u. 25.) die Wieviele e, f bestimmen, oder messen, und nun mit einem, beide in sich fassenden Ausdruck benennen, d. i. in einer Summe, nicht als zwey verschiedene, sondern als ein einziges Wieviele, daß sich als ihr Ganzes gegen sie verhält, angeben soll. Da nun aber nach der Natur der Entstehung und Erkenntniß eines Wievielen überhaupt, S. 11. als der eines Ganzen und Vielfachen, (S. 12. 15. 16. u. 17.) sich ein solches nie anders, als in der Vergleichung mit einer andern gleichartigen Größe erkennen und erzeugen lassen kann; so können sonach auch nur gleichartige Größen addirt werden, in wiefern man sie unter eine Summe, d. i. unter eine Benennung ihres Maaßes bringen will. Man vergleiche l. d. R. Seite 16.

NB. Daher kann man denn auch, wenn man mit bestimmten, durch Ziffern ausgedrückten Zahlen rechnet, nur Zahlen von einerley Werth zusammenzählen.

Anmerk. Die Aggreganden können unter sich gleich, oder ungleich seyn, sie geben in allen Fällen, wenn sie nur gleichartig sind, ein Aggregat. Denn ein Ganzes kann sowohl aus aliquanten als aliquoten Theilen bestehen. (S. 16.)

Satz 35. Da sich sonach, (laut S. 33.) Summen und Summanden wie Ganze und Theile zu einander verhalten; so finden denn auch bey

ihnen alle die Bestimmungen statt, welche diesem Verhältniß (nach S. 28.) wesentlich zukommen.

Daher:

a. Kein Summande, er mag endlich, oder unendlich seyn, kann größer seyn als die Summe.

b. Bey gleichartigen endlichen Größen, muß die Summe allemal größer seyn, als nur einer, oder etliche ihrer Summanden, und umgekehrt. (Vergleiche die Anmerk. zur Einschaltung S. 30.)

c. Das Aggregat ist gleich allen seinen Aggreganden zusammengenommen, und umgekehrt.

d. Wird das eine Aggregandum größer; so wird nothwendig auch um so viel die Summe vergrößert.

e. Wenn a ≳ b, so muß es allemal eine Größe p geben, welche zu b addirt, die Summe a giebt.

D. i. wenn a ≳ b, so ist allemal a = b + p. (8 ≳ 5, also ist 8 = 5 + p = 5 + 3.) Denn, da nach S. 17. wenn a ein Theil von g, es allemal einen Nebentheil d geben muß, der a + d = g als seinem Ganzen macht; so muß es also auch hier seyn, in der Vergleichung, daß man Aggregate und Aggreganden als Ganze und Theile nimmt.

Hieraus leiten sich nun weiter folgende allgemeine, und unter sich in Verbindung stehende Gesetze ab.

Satz 36. Nach dem Begriff der Entstehung eines Gleichvielfachen S. 18. a. muß Gleiches zu Gleichem addirt, Gleiches geben.

D. i. wenn man zwo gleiche Größen hat, und man addirt zu einer soviel, als wie zur andern, so werden die Summen gleich. Z. E. es seyen a und b gleiche Größen, und zu jeder addire man eine dritte c, so erhält man gleiche Summen.

$$\begin{array}{rl} & a = b \\ \text{add.} & c = c \\ \hline \text{also} & a + c = b + c \end{array}$$

Es seyen wiederum $a = b$ und $c = d$; so giebt

$$\begin{array}{rl} & a = b \\ \text{add.} & c = d \\ \hline \text{auch} & a + c = b + d \end{array}$$

; denn man kann nach S. 26. hier für a auch b, und umgekehrt setzen. So können also auch Ganze zu Ganzen, nur wiederum Ganze, und Brüche zu Brüchen addirt, nur wiederum Brüche zu ihren Summen geben. Man vergleiche S. 33. Dagegen

Satz 37. Wenn man zu ungleichen Größen gleiche Größen addirt; oder wenn man zu gleichen

Größen ungleiche addirt; so werden die Summen ungleich, und die größte Summe fällt auf die Seite des größern von beiden ungleichen Aggreganden, Wenn also a ≻ b; so ist auch a ✝ c ≻ b ✝ c.

Denn, da angenommen a ≻ b; so ist a = b ✝ p; (S. 35. e.) folglich a ✝ c = b ✝ p ✝ c = b ✝ c ✝ p (S. 33. Anmerk. 1.) = (b ✝ c) ✝ p, also ist a ✝ c ≻ b ✝ c. Ex. Es sey a ≻ b, und c = c; so giebt:

a ≻ b
add. c = c
a ✝ c ≻ b ✝ c

oder:

c = c
add. a ≻ b
c ✝ a ≻ c ✝ b;

Es sey a ≺ d, und f = g; so giebt:

a ≺ d		oder	f = g
add. f = g		add.	a ≺ d
a ✝ f ≺ d ✝ g;			f ✝ a ≺ g ✝ d.

Sonach:

Satz 38. Wenn man bey gleichartigen endlichen Größen zum Größern mehr addirt, als zum Kleinern; so ist die erste Summe größer, als die andere.

D. i. wenn a ≻ b und c ≻ d; so ist a ✢ c ≻ b ✢ d. Denn da angenommen c ≻ d; so ist a ✢ c ≻ a ✢ d; und da a ≻ b ist; a ✢ d ≻ b ✢ d; (S. 37.) also ist a ✢ c ≻ b ✢ d zu Folge S. 30.

Anmerk. Sonst läßt sich von lauter ungleichen Größen weiter nichts bestimmtes im Allgemeinen sagen. Die Summen können sonst auch, je nachdem die Aggreganden beschaffen, gleich, oder ungleich werden.

Man vergleiche zu S. 36. 37. u. 38. L. d. R. Seite 15.

Satz 39. So wie nach S. 33. ein Wievieles vermehrt wurde, eben so wird es dagegen vermindert, wenn man von einem als ein Ganzes in der Vielfachheit bestehenden Wievielen, wiederum Wieviele seiner Art wegnimmt, und es so entweder ganz vernichtet, oder doch nun so in dieser Vergleichung es als ein vermindertes, oder verkleinertes Wieviele darstellt, welches arithmetische Verfahren dann die Subtraction der Größen genannt wird; und Subtrahiren heißt demnach: — ein gegebenes Wieviele als ein in der Vielfachheit gesetztes Ganze ansehen, und es mit einem andern gleichartigen Ganzen in Vergleichung setzen, dieses ande-

re Ganze als einen, oder alle Theile seiner ansehen, und nun durch die Hinwegnahme dieses von ihm, es entweder ganz aufheben, oder es dadurch um soviel kleiner machen, als letzteres die Einheit enthält.

NB. Die Subtraction ist so ihrem Wesen nach, die der Addition entgegengesetzte Grö-ßenmodification.

a. So wie in der Addition nach S. 33. die zu summirende Größen an sich betrachtet selbst schon Ganze waren, (wenn sie auch in Vergleichung selbst als Brüche wären gesetzt gewesen) und als solche (S. 15. u. 16.) selbst schon ein Vielfaches ausdrückten, die nur als ein solches genommen, als Ganze an sich schon betrachtet, nach S. 19. in der Einheit gesetzt waren, und nun so in ihrer Zusammensetzung eine Menge gäben, deren Inbegriff oder Ausdruck das Aggregat; eben so stehen auch hier beide Größen, sowohl die zu vermindernde, als die, um welche sie vermindert werden soll, an sich betrachtet, als in der Vielfachheit stehende Ganze für sich, sie mögen nun durch ganze, oder gebrochene Zahlen ausgedrückt seyn.

b. Wenn nun dort S. 33. der Ausdruck e + f hieß: e und f als gleichartige Größen annehmen, solche unter einen Namen (Aggregat) als ein neues vermehrtes Vielfaches ausdrücken, und in dieser Verglei-

chung die Aggreganden als Theile ihres Aggregats, also e, f, als Theile von e + f anzusehen waren; so will auch hier in der Subtraction der Ausdruck e — f nichts anders, als das Gegentheil von e + f andeuten, (wie nemlich nach aller Denkform, Vermindern das Gegentheil vom Vermehren) und so wie also e + f in dieser Vergleichung als ein Ganzes, und e, f, als dessen bestehende Theile zusammen angesehen wurden; eben so ist auch hier e — f, als ein aus den gleichartigen Wievielen e und f, als aus diesen seinen, zusammen es gebenden Theilen, bestehendes Ganze zu betrachten, das nur hier in dieser Vergleichung, nicht mit diesen seinen Theilen zusammengenommen; sondern wovon der eine (e) um soviel vermindert werden soll, als wie der andere (f) die Einheit enthält.

c. Man nimmt also hier in der Subtraction von einem angenommenen Ganzen, eine andere Größe, die man in dieser Vergleichung als einen, einige, oder alle Theile seiner betrachtet, weg. Man nimmt von

e ————————————

weg f ———————— d. i. man vermindert e um f, welches ausgedrückt wird durch e — f, im Gegensatz der Addition.

d. Diejenige Größe, welche vermindert werden soll, wie hier e, heißt das Minuendum, und diejenige, welche von ihr weggenommen werden soll, wie hier f, heißt der Diminutor, oder Subtrahend.

Bleibt in diesem Falle von der einen Größe noch etwas übrig, als e ———————

— f ———————

= d ——————— ; so heißt solches (d) der Rest, als welcher Ausdruck das noch Uebrige von einer solchen Größe, die eine dergleichen Verminderung erlitten, ohne aber, daß sie dadurch selbst gänzlich wäre aufgehoben worden, anzeigt.

e. Denn, drückt man nun dergleichen Größen allgemein aus, e — f = (e — f) so sehen wir hieraus: daß es in der arithmetischen Form nicht nothwendig, daß der Subtrahend kleiner als das Minuendum seyn müsse, denn e kann hier eben sowohl kleiner als f seyn.

f. Von selbst aber giebt es hier gleich die Natur der Sache, daß Subtrahend und Minuend nie mit einander verwechselt werden können, und ersterer daher immer als solcher mit dem angenommenen Minus-Zeichen (—) voranbemerket seyn müsse, indem zum Reste es sich nicht wie bey zu summirenden Größen verhalten könne, wo es einerley war, in welcher Ordnung dort die Aggreganden gesetzt wurden, denn hier giebt diese Verwechselung eine große Verschiedenheit,

e ——————————.

weniger f ——————— läßt noch einen

Rest = d ——————— nach; da hingegen

f ——————

weniger e ——————— wohl auch einen Rest = d ——————— nach sich läßt, aber von ganz anderer Bedeutung als im erstern Fall, wie wir gleich weiter unten sehen werden.

Aber e und f als Größen genommen, können solche (nach S. 33.) immer verwechselt werden, wenn dies nur nicht in der Beziehung gegen einander als Diminutor und Minuend geschiehet. Doch setzet man gewöhnlich den Minuend voraus, und darauf den Diminutor unter vorgesetzter Minus (—) Marke, also e — f, wenn nemlich e um f verringert werden soll. Will man aber diese Ordnung verwechseln; so muß nicht nur immer der Diminutor wenn er voraus steht, als solcher durch das vorstehende — characterisirt seyn, sondern man bezeichnet nun auch den Minuend, als eine der Verminderung entgegengesetzte Größe mit vorstehendem + Zeichen, und es stehet alsdann — f + e.

g. So wie aber Aggregat und Aggreganden an sich selbst nicht Ganze und Theile ausdrückten, sondern nur vergleichungsweise (nach S. 33. NB.) so anzusehen waren, eben so verhält es sich hier, wenn man (nach b. dieses S.) Minuend und Diminutor als die zusammen bestehenden gleichartigen Theile eines Ganzen zu betrachten hat, wovon nemlich der eine um so-

viel vermindert werden soll, als der andere durch seine Einheit anzeigt.

h. Die Addition und Subtraction sind also ihrem Begriff und Wesen nach einander gerade entgegengesetzt, denn, so wie in der Addition ein Wievieles vergrößert wird, indem man (nach S. 33.) neue gleichartige Wieviele, als neue hinzukommende Theile seiner zu ihm hinzusetzt; eben so wird durch das Wegnehmen solcher Theile dagegen in der Subtraction ein Wievieles verkleinert: daher sie denn auch in solcher Natur einander wechselseitig zur Probe dienen, da jederzeit, wenn a — b = d, dagegen d + b = a, (wenn 8 — 3 = 5, so ist 5 + 3 = 8) d. i. wenn man den Theil b, (den Diminutor) um welche man eine Größe a (als Minuend) verringert, mit dem von a verbliebenen Reste d wiederum zusammennimmt, nothwendig die erstere Größe a als ungeändert wieder hergestellt werden muß. Diese wesentliche Eigenschaft aller Größe, daß sie ungeändert wieder dargestellt wird, wenn man zu ihrem gelassenen Reste das von ihr weggenommene wieder hinzusetzt, also daß die Addition der Subtraction nothwendig zur Probe dienen muß, hat auch einige verleitet, daß Subtrahiren also zu definiren, daß von e abziehen soviel sey, als: — eine Größe d finden, welche zu f addirt, der Größe e gleich sey; — daher sagen sie: — der Minuend sey also die Summe des Subtrahenden und des Restes. Augenscheinlich sieht man hier, daß diese Ma-

thematiker, welche die Subtraction also definiren, irrig, diese wesentliche Eigenschaft der Größe, für das Wesen dieser Modification selbst genommen haben.

NB. Eine kleinere ganze Zahl u, wird also von einer größern n subtrahirt, wenn man zur kleinern u (zu Folge S. 33.) nach und nach soviel Einer addirt, bis die Summe der größern Zahl n gleich wird, und man dann die Menge dieser addirten Einer bestimmt, und zum Reste setzt. Z. B. 7 — 4; giebt 4 + 1 + 1 + 1 = 7, und 1 + 1 + 1 = 3, also ist 7 — 4 = 3. Daher denn wie S. 33. die Summen aus ganzen Zahlen selbst ganze Zahlen seyn müssen; so geben also auch Ganze von Ganzen abgezogen, dergleichen zum Rest.

1. Wie nun nach dem Wesen der Größe selbst, der Vermehrung ihrer, die Verminderung entgegen steht, und jede als Minuend gesetzte Größe die nothwendige Eigenschaft haben muß, daß sie als ein Ganzes, den Diminutor und den Rest als ihre gesammte Theile einschließt; so folgt daraus: daß wie (nach S. 34.) sich nur gleichartige Größen addiren ließen, und diese nur unter eine Summe gebracht, und so als eine Größe ausgedrückt werden konnten, eben so sich nur gleichartige Größen können von einander abziehen lassen, und so in dem Reste eine neue verminderte, oder gar aufgehobene Einheit geben können.

k. Aus h dieses Satzes folgt also: daß, da nach dem Wesen der Subtraction der Minuend als ein Ganzes, und der Diminutor als ein von solchem wegzunehmender Theil, und beide, Diminutor und Rest als alle Theile dieses zu betrachten, daß hier umgekehrt von dem Gesetz für die Summe in der Addition 35, b. der Rest, als ein Theil vom Minuend (nach 28. b.) bey endlichen Größen, jederzeit kleiner als dieser seyn müsse. D. i. e — f = d ist d ≺ e. Hingegen, wenn hier nothwendig (nach h. dieses S.) d + f = e seyn muß; so verhalten sich beide, Rest und Diminutor, zum Minuend wiederum als Theil und Nebentheil, oder als Theil und Ergänzung zum Ganzen zu einander, (S. 17. d.) und es kann daher der Rest sowohl größer denn der Diminutor, oder diesem gleich, als auch kleiner vor solchem seyn.

Satz 40. Weiter ist von dem Wesen der Subtraction zu merken: daß sie wohl im Gegensatz der Addition, den Grund von den in der Arithmetik vorkommenden entgegengesetzten Größen in sich fasse, mit nichten aber mit diesen einerley Wesens dürfe angesehen werden.

Die Subtraction im Gegensatz der Addition besonders in Erwägung S. 39. e. u. f. faßt denn sonach den Grund von der Lehre von entgegengesetzten Größen in sich, doch muß man ja nicht entgegengesetzte

Größen, mit in Subtraction gesetzten Größen verwechseln. Denn in der Subtraction betrachtet man (nach S. 39. h. i.) zwey gleichartige Größen, zwey solche, die (nach S. 32.) zusammenaddirt, und unter eine Summe gestellt werden können, als zwey solche, daß eine davon das Minuendum als das Ganze, und die andere (der Diminutor) dagegen, als ein vom erstern wegzunehmender Theil solches aufgestellt werden. Hierin unterscheiden sich also in Subtraction gesetzte Größen wesentlich von entgegengesetzten Größen, denn diese müssen sich ihrer Natur nach characterisiren, daß sie, nach S. 13. b. und gemäß S. 34. wohl nothwendig ein gleichartiges Wievieles in der Idee, in welcher sie einander entgegengesetzt, bezeichnen, aber in Beziehung auf dieses ihnen gemeinschaftliche Ideelle, welches ihr allgemeines Geschlecht, wie zwo verschiedene Arten solches, deren specifischer Unterschied das Entgegengesetzte zu sich, ist, so auch wiederum unter verschiedenen Benennungen stehen, und also, rücksichts der Verschiedenheit ihrer Benennungen, nie zu einer Summe zusammengezählt werden können; wie Vermögen und Schulden, Vorwärts und Rückwärts gehen ꝛc. denn die Summe würde weder das eine, noch das andere ausdrücken. Nur in der Aehnlichkeit, weil hier auch die eine die andere aufhebet, oder vermindert, kann man sich entgegengesetzte Größen, wie dergleichen, die in der Subtraction gesetzt werden, vorstellen, daher man auch beide durch einerley Zeichen, nemlich durch a — b aus-

druckt, nicht aber sind sie solches auch in der That, denn wenn der Ausdruck a — b entgegengesetzte Grösßen bezeichnet, so kann nie a — b = a — b + b nach S. 39. h. i. seyn. Die Lehre von den entgegengesetzten Grösßen erheischt daher in der Mathematik nothwendig ein eigenes Kapitel, und kann nicht, wie hierin einige Mathematiker gefehlt zu haben scheinen, mit der Subtraction zugleich vermischt werden. Man vergleiche hier S. 13. b.

Entgegengesetzte Grösßen entstehen aber im allgemeinen und besondern aus der Subtraction. Im allgemeinen in wiefern man jeden Minuend als etwas positives, und den Diminutor als etwas negatives, als ein jenem engegengesetztes ansehen muß, daher man denn auch entgegengesetzte Grösßen mit + und —, als den für die Addition und Subtraction angenommenen Zeichen andeutet. Im besondern, wenn nemlich der Fall S. 39. f. eintritt, daß der Diminutor würklich grösßer als das Minuendum, denn dann bleibt ein Rest von dem Minus, welcher daher als solcher auch unter diesem Zeichen stehen muß, und nun in der Natur einer entgegengesetzten Grösße von dem Minuend erscheinet. Von 100 Rthlr. Kapital, soll ich 120 Rthlr. ausgeben, so ist hier nothwendig 100 — 120 = — 20, d. i. der ich 100 Rthlr. Vermögen hatte, habe nun — 20, d. i. 20 Rthlr. Schulden, wenn ich von 100 Vermögen, 120 auszahlen sollte. Hier sieht man aber leicht, daß 100 — 120 als in

der Subtraction stehende Größen gesetzt, nothwendig die Rechnung umgekehrt werden müsse, und man hier die 120 als das eigentliche Ganze, (den Minuend) und die 100 als den Theil davon, (den Diminutor) ansehen, und das es heissen müsse: von 120 auszuzahlenden Rthlrn. ziehe ich 100 Rthlr. als ausgezahlt ab, und verbleibe also noch 20 Rest. Algebraisch dieses ausgedrückt durch e — t besteht die Sache nach S. 39. e. für sich.

Doch darf man sich hier nicht etwa vorstellen, als ob man das Größere vom Kleinern selbst wegnehmen könne, sondern es ist hier nur eine Verwechselung der Namen, daß man nemlich nun, wenn das Wegzunehmende größer als das Vorhandene, man dann letzteres als den eigentlichen Minuend ansiehet, ob man es gleich immer gewöhnlich als den Diminutor zu benennen pflegen mag.

Satz 41. Als nächste Gesetze für die Subtraction ergeben sich nun aus dem Wesen solcher: S. 39. u. 40.

a. Zieht man von der Summe zwoer Größen die eine ab; so muß die andere zum Rest verbleiben.

D. i. wenn a = d + b; so ist a — b = d, imgleichen a — d = b. (8 = 5 + 3 giebt 8 — 5 = 3 und 8 — 3 = 5.) Erhellet aus S. 39. h. denn,

wenn d ✝ b = a; so muß nothwendig nun a = d verbleiben, wenn man von den zween es gebenden Theilen d ✝ b den einen wegnimmt, und es so um diesen (um b oder d) vermindert.

Eben so daher

Wenn man vom Minuend den Rest abzieht; so muß der Subtrahend übrig bleiben.

D. i. wenn a — b = d; so ist auch a — d = b. (Wenn 8 — 5 = 3; so ist auch 8 — 3 = 5.) Denn, wenn a — b = d; so ist (nach a.) also a = d ✝ b, und daher nothwendig a — d = b.

c. Wenn der Subtrahend dem Minuend gleich ist, so vernichten, heben sie einander auf, oder, sie lassen nichts zu ihrem Rest; Es ist solcher = ȯ.

D. i. a — a = ȯ. Denn Minuend und Subtrahend sind hier als zwo gleiche Größen (S. 18. a.) so in Vergleichung gesetzt, daß eine von der andern weggenommen worden. So wie sich nun (S. 26.) gleiche Größen substituiren lassen; so müssen sie also auch, eine von der andern weggenommen, einander vernichten: — und ist nun nach dem Wesen der Subtraction, der Subtractor als ein wegzunehmender Theil vom Minuend, und dieses dagegen als das Ganze zu betrachten; so muß nothwendig das Minuendum

vernichtet werden, wenn in dem ihm gleichen Subtrahenden alle seine es gebende Theile zusammen so von ihm weggenommen werden. Es kann sonach nichts von ihm übrigbleiben, d. i. der Rest ist = o. Wenn also b — a = o; so ist b = a + o, d. i. es ist selbst b = a.

In eben der Natur heben sich denn auch entgegengesetzte Größen einander auf; x (Vermögen) — x (Schulden) = o, d. i. kein Vermögen; beide verschiedene Größenbenennungen, nemlich hier als gleichartige Wieviele ihres ideellen Etwas, (Vermögens) unter dem sie beide (40.) als unter ihrem allgemeinen Geschlecht begriffen sind, angesehen, und in dieser Natur als Minuend und Diminutor in der Vergleichung stehend, betrachtet. — Trift daher der Fall S. 39. f. ein, daß das als Diminutor gesetzte Negative, als würklich größer als das als Minuend gesetzte Positive, letzteres nicht nur vernichtet, d. i. = o macht, sondern daß nun dagegen, nach S. 40. so gar ein Rest vom Diminutor, dem negativen übrigbleibt, daß a ≺ x giebt a — x = — y als einen Rest nicht von + a, sondern von — x; daß also war vorher geworden a — x = o; so sagt man denn, daß in dieser Vergleichung genommen y weniger als nichts (weniger als o) sey, den Ausdruck des Nichts hier nemlich nicht absolut, sondern nur (nach 13. d.) in der Natur eines comparativen Begriffes genommen. Denn, vergleichungsweise geben 70 Rthlr. Vermögen — 100

Rthlr. Schulden, wohl weniger als Nichts vom Vermögen, denn er braucht noch ✝ 30 Rthlr. bis er auf dem Standpunkte des o Vermögens, der Sicherheit vor den Manichäern ist; absolut aber betrachtet, muß freylich (nach 13. d.) — y etwas bedeuten, nemlich hier = 30 Rthlr. Schulden, das Negative nun (nach S. 40.) für das Positive genommen. In Beziehung auf das Positive, muß daher eine negative Größe dem Positiven um desto näher seyn, je kleiner solche ist; — 2 ≺ — 5. und also — 1 ≺ ✝ o.

Aus c. folgt nun weiter:

d. Wenn man eine Größe zu einer andern addirt, und zugleich auch von ihr subtrahirt; so bleibt sie ungeändert.

D. i. a ✝ b — b = a, denn ✝ b — b heben sich als gleiche Größen einander in a auch so wieder einander auf, daß sonach a nothwendig ungeändert verbleibet.

Eben so daher

e. Wenn man von einer Größe eine andere subtrahirt, und diese hernach zum Rest wieder addirt; so bleibt sie unverändert.

D. i. a — b ✝ b = a, nach a. dieses S. und S. 39. h.

f. Wie nach S. 35. d. vergrößerte Aggreganden, auch eine um soviel größere Summe gaben; eben daher nach dem Wesen der Subtraction (S. 39.) wird, wenn von einem Aggregandum etwas abgezogen wird, dagegen auch die Summe um soviel kleiner. Hieraus folgen wieder:

g. Wird das Diminuendum größer oder kleiner; so wird auch der Rest um soviel größer, oder kleiner.

h. Wird der Diminutor größer; so wird der Rest um soviel kleiner: und wird der Diminutor kleiner; so wird dagegen der Rest um soviel größer.

Denn, jemehr abgenommen wird, um desto weniger bleibt übrig, und so umgekehrt.

Satz 42. Für die Verfahrungsmethode, allgemeine Größen von einander zu subtrahiren, bestehen nach dem Wesen ihrer, S. 39. u. 40. aus Grund S. 33. Anmerk. 1. wenn man nur bey der Bezeichnung des Minuenden und Diminutors das S. 39. f. aufgestellte Gesetz beobachtet, diese S. 33. Anmerk. 1. entsprechende Gesetze:

a. Das Wieviele, welches erzeugt wird, ist einerley, man mag zu einer Größe a erst successiv b addiren, und dann c subtrahiren, oder man mag zu a auf einmal die Differenz (b — c) setzen.

D. i. es ist allemal a + b — c = a + (b — c) Denn es ist a + (b — c) + c = a + b nach S. 41. e.; also a + (b — c) = a + b — c. (S. 41. a.)

b. Einerley ist das Wieviele, welches erzeugt, man mag zu a erst b addiren, und hernach c subtrahiren, oder man mag erst c subtrahiren, und hernach b addiren.

D. i. es ist allemal a + b — c = a — c + b; denn, nach S. 33. Anmerk. 1. und 41. e. ist a — c + b + c = a — c + (b + c) = a — c + (c + b) = a — c + c + b = a + b, also a — c + b = a + b — c. (S. 41. a.)

c. Desgleichen ist die Quantität des Restes einerley, man mag von einer Größe a auf einmal die ganze Summe, (b + c) oder successiv einen Summanden nach dem andern abziehen.

D. i. immer ist a — (b + c) a — b — c. Denn nach S. 33. Anmerk. 1. ist a — b — c + (b + c)

$= a - b - c + b + c = a - b + b - c + c$
(nach b) $= a$ (zu Folge S. 41. e.)

d. Eben so entsteht einerley Größe, man mag von a den Rest (b — c) subtrahiren, oder man mag von a erst den Minuend b subtrahiren, und hernach den Subtrahend c addiren.

D. i. es ist allemal $a - (b - c) = a - b + c$. Denn, $a - b + c + (b - c) = a - b + c + b - c$ (nach a) $= a - b + c - c + b$ (nach b) $= a - b + b$ (nach S. 41. d.) $= a$. (zu Folge S. 41. e.)

Satz 43. Weiter fließen aus ihrem Wesen folgende allgemeine Gesetze für die Subtraction:

a. Gleiches von gleichem abgezogen giebt gleiche Reste, da Gleiches zu Gleichem gleiche Summen giebt. (S. 36.)

D. i. wenn $a = c$, und $b = d$; so ist $a - c = b - d$. Denn da sich als gleiche Größen nach S. 26. auch c für a, und d für b setzen lassen; so läßt sich c — d für a — b setzen, und es ist also hier $a - b = c - d$.

b. Eben so bestehet im Gegensatz von S. 37. daß: wenn man von ungleichen Größen

gleiche; oder wenn man von gleichen Größen ungleiche abziehet, nothwendig ungleiche Reste entstehen müssen, und zwar muß im erstern Fall, bey gleichem Diminutor der größere Minuend auch einen größern Rest lassen.

D. i. Wenn a ≷ c; so ist a — b ≷ c — b. (8 — 5 ≷ 7 — 5.) Denn, ist von zween als Minuenden gesetzten Größen a und c, hier a ≷ c, so faßt also nach den Gesetzen des Größerseyns (S. 18. b.) hier a als ein Vielfaches, als eine hypothetische Größe, mehrere gleichartige es gebende Theile in seiner Einheit zusammen, als das dagegen kleiner seyende c; von beiden nun ein Gleichvielfaches weggenommen (S. 18. a.) so müssen nothwendig von dem größern Minuend a, auch mehrere dergleichen gleichviele Theile zum Rest verbleiben, als es deren schon vor dieser erlittenen Modification mehrere als c begriff. Intuitiv demonstrirt sich dieses Gesetz also: Ist a ≷ c, so ist (nach S. 35. e.) also a = c + d; und es ist daher (nach a dieses Satzes) a — b = c + d — b, oder (nach S. 33. Anmerk. 1.) a — b = d + c — b; folglich (nach S. 42. a.) ist a — b = d +, (c — b) und denn so, wie jede Summe größer seyn muß als nur einer, oder einige ihrer Summanden (S. 35. b.) demnach auch hier a — b ≷ c — b.

Man gebe nun umgekehrt diese Ungleichheit des Wievielen dem Diminutor, so daß man umgekehrt von gleichen Minuenden (S. 18. a.) ungleiche (S. 18. b.) Subtrahenden wegnehme; so läßt sich eben so raisonnirend und intuitiv der zweete Theil unsers gegebenen Gesetzes dagegen demonstriren, daß nemlich:

Von gleichen Minuenden ungleiches weggenommen, der größere Diminutor den kleinern Rest lasse.

D. i. wenn c ≺ b, und beide als Diminutors von einer gleichen Größe a = a gesetzt sind; so ist a — c ≻ a — b. (8 — 5 ≻ 8 — 7) Denn der größere Diminutor b, faßt als ein Größeres Vielfache als c, (nach S. 18. b.) auch mehrere Theile in sich, die von a, dem Minuend weggenommen werden, als c deren begreift, beide nun von dem sich gleichen a = a weggenommen, muß nothwendig der größere Diminutor weniger von a zum Reste lassen, als der kleinere, weil nach dem Begriff seiner Einheit, durch ihn, in dem sich gleichen Minuend mehrere der Bestandtheile desselben aufgehoben werden, als dieses durch den kleinern Diminutor geschiehet.

Denn, da hier die Diminutors angenommen worden c ≺ b; so ist (nach S. 35. e.) also b = c + d, und also (nach a dieses S.) a — b = a —, (c + d) und so (nach S. 42. c.) ist a — b = a — c — d

folglich (nach S. 39. h.) ist a — b + d = a — c; und sonach nach dem Begriff und Wesen der Subtraction (a — b) + d = a — c; also (zu Folge S. 35. b.) ist denn a — c ≻ a — b.

c. Desgleichen fließt denn nun aus a. u. b. dieses Satzes, und in Gemäßheit S. 38. daß, wenn bey gleichartigen endlichen Größen, man vom Größern weniger abzieht als vom Kleinern; so mithin nothwendig auch die erstere Differenz größer, als die andere seyn müsse.

D. i. wenn a ≻ b, und c ≺ d; so ist a — c ≻ b — d. (8 — 3 ≻ 7 — 5.) Denn da (nach b dieses S. zweeten Falles) a — c ≻ a — d, und (nach dem ersten Falle unter b dieses S.) a — d ≻ b — d; so ist hier a — c ≻ b — d zu Folge S. 30.

Satz 44. Setzen wir zwo endliche Größen c und p nemlich c ≻ p, so zusammen, daß zwischen beiden keine dritte Größe d gefunden werden könne, welche größer als p, und doch zugleich kleiner als c wäre; so heißen in dieser Zusammensetzung c, p, oder p, c nächste Größen, und es gilt für alle nächste Größen das Gesetz: daß zwischen ihnen keine dritte müsse gefunden werden können, die größer als die

vorhergehende, und zugleich kleiner als die nächstfolgende wäre.

NB. Von geraden und ungeraden Zahlen, imgleichen von dem Wesen der Modification mit entgegengesetzten Größen, wenn sie als eigenthümliche Wieviele gegeben.

Denn, wenn man jede endliche Größe, welche kleiner als die gleichartige endliche c ist, durch p ausdrückt; so folgen alle endliche Größen, ihrer Wielheit nach, in dieser Ordnung auf einander:

p, c, c + p, c + c, c + c + p, c + c + c,
1, 2, 2 + 1, 2 + 2, 2 + 2 + 1, 2 + 2 + 2,
3, 4, 5, 6,
c + c + c + p, c + c + c + c, c + c + c + c + p,
2 + 2 + 2 + 1, 2 + 2 + 2 + 2, 2 + 2 + 2 + 2 + 1,
7, 8, 9,
c + c + c + c + c,
2 + 2 + 2 + 2 + 2,
10, u. s. w. ohne Ende fort.

Denn, da angenommen c > p; so ist jede folgende Größe größer, als jede der vorhergehenden, weil, wenn man (nach S. 37. und 38.) zum Größern Gleiches oder Größeres addirt, auch größere Summen kommen. Da nun p jede Größe bedeutet, die kleiner als c ist; so ist auch zwischen zwo nächsten Größen, z.

B. zwischen c und c ✢ p, zwischen c ✢ p und c ✢ c keine Größe möglich, die größer als die vorhergehende, und zugleich kleiner, als die nachfolgende wäre. Denn, man seße z. B. c ✢ d wäre größer als c, aber kleiner als c ✢ p, so ist nicht d = p, weil sonst c ✢ d = c ✢ p wäre, da (nach S. 36.) Gleiches zu Gleichem, Gleiches geben muß: auch wäre nicht d ≻ p, weil sonst (nach S. 37.) auch c ✢ d ≻ c ✢ p; folglich wäre d ≺ p, nach den Gesetzen der Gleichheit und des Größerseyns, S. 18. da seyn muß, entweder c = b, oder c ≻ b, oder c ≺ b; folglich da p ≺ c angenommen ist, also auch d ≺ c, da (nach S. 30.) die Größe, welche kleiner ist, als die kleinere von zwoen ungleichen Größen, auch kleiner, als die größere derselben seyn muß. Allein, da jede mögliche Größe, die kleiner als c ist, gleich p seyn soll, (wie angenommen worden) so wäre d = p, da nun dieses aber dem vorigen widerspricht; so bestehet mithin unser im Satze aufgestelltes allgemeines Gesetz für nächste Größen.

Anmerk. Dieser Satz stehet hier eigentlich als ein Einschaltungssatz, da er seinem Wesen nach für Größen überhaupt, oder, für Größenentstehung gehört. Allein, da die Form seines Beweises nothwendig schon die Kenntniß der Additionsgesetze, wie wir gesehen, erfordert; so mußte dessen Aufstellung bis hieher verspart werden.

Es folgen nun hieraus:

Drückt man das Vielfache von c, nemlich c ✝ c, c ✝ c ✝ c u. s. überhaupt durch m c aus, (S. 19.) so ist, wenn b ≽ c ist, entweder b = c ✝ p, oder b = m c, oder b = m c ✝ p.

b. Wenn also b ≽ c, aber c kein Maaß von b ist; so ist entweder b = c ✝ p, oder b = m c ✝ p, denn in diesem Fall ist nicht b = m c. (S. 16. 11. c.)

c. Wenn b ≽ c ✝ c, und c kein Maaß von b ist; so giebt es allemal ein solches Vielfache m c, daß zwar m c ≺ b, aber schon m c ✝ c ≽ b ist.

Denn da c ✝ c ≽ c ✝ p ist, (S. 37. u. 38.) so ist b ≽ c ✝ p; (S. 30.) folglich (nach S. 18.) nicht b = c ✝ p; mithin (S. 28. b.) b = m c ✝ p; folglich (S. 36.) m c ≺ b, aber m c ✝ c ≽ m c ✝ p, (S. 37. u. 38.) also auch m c ✝ c ≽ b zu Folge S. 30.

d. Es ist sonach jede Zahl, die als der Ausdruck eines Ganzen stehet, die Summe der ihr nächstvorhergehenden und der Zahl 1; denn 2 = 1 ✝ 1; 3 = 2 ✝ 1; 4 = 3 ✝ 1 u. s. w. Denn von zwoen nächsten Größen, deren Zahlen als Ausdrücke von Ganzen stehen, kann der Unterschied bloß die Einheit seyn. Sind e und f nächste Größen, p der Ausdruck für die Einheit, und angenommen f ≽ e; so faßt (nach 28.

c.) f nothwendig e als einen Theil seiner in sich, und f ist als das Ganze in dieser Rücksicht zu betrachten. Da nun aber, wenn so e ein Theil von f, es (nach S. 17.) nothwendig noch einen Nebentheil d geben muß, welcher macht, daß e = f werde; so kann also dieser hier bey Ausdrücken für Ganze, als nächste Größen, kein anderer als p seyn. Da aber e und p als Ganze gesetzt sind, und so in ihrer weitern Zusammensetzung eine Summe zu einem ihnen gleichen Ganzen geben; (S. 32.) so ist also hier allemal f die Summe von e + p.

Dies führt uns denn nun noch auf die Bestimmung der geraden und ungeraden Zahlen.

e. Die Zahl 2 = der Summe 1 + 1, nennen wir ein Paar, und daher Paarzahlen, oder gerade Zahlen, alle diejenigen, welche als ein Vielfaches aus einer Menge von Paaren, oder aus einer m maligen zu sich selbst Setzung der Zahl 2 entstanden. In der natürlichen Reihe der Zahlen drücken sonach 2, 4, 6, 8 und 10 gerade, oder Paarzahlen aus. Dagegen giebt die Zahl 1, und jede Zahl, die aus einer m maligen Setzung der Zahl 2 — 1, oder 2 + 1 entsprungen, einen Größenausdruck, den wir eine ungerade oder Unpaarzahl nennen, welche in ihrer natürlichen Folge die Zahlen 1, 3, 5, 7 und 9 sind. Daher nun, da nach dem dekadischen Gesetz unserer Zahlenschrift, wir solche durch eine m malige Setzung der 10

andeuten; so müssen alle Dezimationen von der 10 in ihrer m maligen Setzung eine gerade Zahl andeuten, so wie jede Zahl, die aus einer m maligen Setzung der 2, als ein Vielfaches aus dieser entstanden; weil die 10 selbst gleich der 2, aus der sie als ein Fünffaches entstanden, eine gerade Zahl ist; und es ist also bey jeder Zahl, die ein m faches von der 10, nur auf die ihr beygesetzten Einer zu sehen, ob sie gerade, oder ungerade, je nachdem ihr ein gerader, oder ungerader Einer beygesetzt ist. Alle Zahlen daher, die sich in der Einerstelle mit 2, 4, 6, 8, 0 endigen, sind gerade, und die, welche sich mit 1, 3, 5, 7, 9 endigen, sind ungerade Zahlen. Wenn man daher unter n eine jede beliebige Zahl versteht; so ist jede gerade Zahl $= 2n$, und jede ungerade $= 2n + 1$, oder $2n - 1$.

Aus dem Wesen der Entstehung gerader und ungerader Zahlen, entstehen daher als Gesetze für die Addition und Subtraction.

α. Eine gerade Zahl zu einer geraden Zahl addirt, oder von ihr subtrahirt, giebt eine gerade. Denn $(2n + 2m) = 2(n + m)$ und $(2n - 2m) = 2(n - m.)$

β. Eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addirt, oder von ihr subtrahirt, giebt auch eine gerade Denn, $(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$ und $(2n + 1) - (2m + 1) = 2n - 2m + 1 - 1, = 2n - 2m = 2(n - m.)$

γ. Eine gerade Zahl zu einer ungeraden addirt, oder eine von der andern subtrahirt, giebt eine ungerade. Denn, $2n \pm (2m \pm 1) = 2(n \pm m) \pm 1$; und $2n - (2m \pm 1) = 2(n - m) - 1$; imgleichen $(2m \pm 1) - 2n = 2(m - n) \pm 1$.

f. Endlich ist denn hier noch von dem Modificationsverfahren mit entgegengesezten Größen anzumerken.

α. Ist eben das, das characterisirende entgegengesezter Größen, wodurch sie sich von in simpler Subtraction gesetzten Größen unterscheiden, daß sie, als Wieviele von verschiedener Benennung, (nach S. 34.) sich unter keine Summe bringen lassen; so kann es ja sonach auch keine Addition entgegengesetzter Größen, als solcher geben, weil dieses so ein Widerspruch im Objecte-selbst wäre. Wohl haben dieses auch die Mathematiker einsehen müssen; wenn sie aber daher, um diesem auszuweichen, doch immer in allen ihren einander nachgeschriebenen Kompendien, ihre, da aus dem Monde gelehrte Addition entgegengesezter Größen definiren wollen, daß solche im Grunde eine Subtraction wäre; so thun sie hier weiter nichts, als daß sie nun aus einem einfachen Widerspruch in einen doppelten verfallen, indem sie die Addition zugleich zu einer, und auch zu keiner Addition machen.

β. Man kann demnach entgegengesetzte Größen, ihrem Ursprunge und Wesen gemäß, nur als in der Subtraction stehende betrachten, die sich, rücksichts ihrer einander aufhebenden Benennungen, als Minuend und Subtractor, in Hinsicht auf das ihnen gemeinschaftlich Ideelle, als das ihnen gemeinschaftliche Geschlecht (S. 40.) zu einander verhalten. Vermögen und Schulden stehen unter dem gemeinschaftlichen Namen Vermögen; Rück- und Vorwärtsgehen unter dem des Gehens; Schlafen und Thätigseyn unter dem des Lebens u. s. w. und es können nur dergleichen Größen sich entgegengesetzte seyn, die sich als solche unter ein allgemeines Geschlecht bringen lassen, weil sich mathematisch nur Gleiches mit Gleichem, reelles oder ideelles, vergleichen läßt.

1) Es ist aber an sich klar, daß der Ausdruck a — (b — x) nichts anders heissen kann, als daß man von a nicht das ganze b, sondern nur b — x wegnehmen soll; so zeigt also in dieser Verbindung, in der Natur entgegengesetzter Größen — (b — x) hier x nicht ein negatives, sondern ein positives, zu dem positiven a noch hinzuzuaddirendes Wieviele an.

2) Eben so kann umgekehrt dagegen a — (b + x) nichts anders heißen, als daß man von a nicht alleine das ganze b, sondern auch dazu noch das x, also (b + x) wegnehmen soll; so zeigt denn nun daher im Gegentheil in der Verbindung entgegengesetzter Größen

— (b + x) alsdann x nothwendig noch ein negatives an, welches zu dem schon vorhandenen negativen b gesetzt, und nun als ein der Größe a entgegengesetztes von dieser wegzunehmendes Aggregat betrachtet werden muß.

Aus diesen beiden Sätzen ergiebt sich also der Grund, warum man im Subtractionsverfahren mit entgegengesetzten Größen die Zeichen bey der als Diminutor gesetzten verändern muß. Denn ist sich jedes — y vorzustellen, daß es (nach S. 40. c.) als ein Rest = — y, aus einer Größe a — x (a ≻ x angenommen) entstanden, wo also a — x = o vorher geworden war; so ist sich jeder negative Ausdruck — y, da das Negative nur im Gegensatz des Positiven (nach 13. b.) existiren kann, und dieses also bey ihm nothwendig präsumirt werden muß, als eine complexe Größe vorzustellen, deren erstes Glied = o, so daß also — y in dem Ausdruck a — (— y) = a — (o — y) wo denn nun (nach 1.) sich nothwendig — y in + y verwandelt, und als solches zu + a gesetzt werden muß, welches nun nothwendig = a + y — o d. i. = + (a + y) ist.

Und eben so, weil (nach 13. b.) eine Größe nur dann besonders positiv heißt, wenn sie im Gegensatz einer ihr beygesetzten negativen stehet, so muß nothwendig auch in dem Ausdruck — a — (+ y) sich (nach 1.) vorgestellt werden, als wenn stünde — a —

(o ✝ y) wo denn nun dagegen wiederum (nach 2.) ✝ y in — y sich verwandelt, und als solches ebenfalls zu dem schon vorhandenen — a hinzugesetzt werden muß, welches nun nothwendig = — (a ✝ y) ✝ o, d. i. = — (a ✝ y) ist.

Nicht nur schmeicheln wir uns, auf diese Weise gründlicher, und also auch einleuchtender das Modificationsverfahren mit entgegengesetzten Größen hier gezeigt zu haben, als dieses in den mathematischen Kompendien geschehen ist; sondern wir haben zugleich auch den hier allgemein angenommenen, und nicht untersuchten, sondern nur spitzfindig unterstützen gewollten Widerspruch gehoben: daß man das Subtractionsverfahren mit entgegengesetzten Größen, nicht etwa ein Addiren zum Entgegensetzten weiter nennen wolle. Denn, nach welchen logischen Gesetzen sollen 10 Rthlr. Vermögen weniger 5 Rthlr. Schulden wohl je 15 Rthlr. Vermögen, und umgekehrt werden können! — Die Subtraction mit entgegengesetzten Größen wird also, und kann nie eine Addition werden, sondern sie bleibt was sie ist, seyn soll und muß. Man addirt ja hier nur Gleiches und Gleiches zusammen, und verrichtet alsdann die Subtraction mit dem entgegengesetzten, da dann, wenn dieses nun = o ist, sich der Minuend nothwendig selbst ungeändert zum Rest geben muß.

Satz 45. Als Schlußresultat ergiebt sich also aus dem Wesen der Addition, und allen aus diesem angeführten für sie sich ergebenden allgemeinen Gesetzen: daß bey der Addition die erhaltene Summe ein Gleichvieles mit allen sie gebenden Aggreganden zusammen sey; so wie dagegen für die Subtraction sich ergiebt: daß der durch diese vorgenommene Modification mit einer Größe erhaltene Rest als eine Ergänzung zum Ganzen angesehen werden müsse.

Denn, entstehet (nach S. 18. a.) ein Gleichvieles, wenn man zwo Größen mit einander also in Vergleichung setzet, daß sie beide entweder durch einerley Maaß, oder durch eine und dieselbe Wiederholung dieses Maaßes erzeugt werden; so characterisirt sich also jede Summe als ein solches. Denn die Aggreganden müssen sich nothwendig als Größen selbst gleich seyn, (S. 27.) und ihr Maaß ist also die Einheit; ist nun das Aggregat (nach S. 33.) der Inbegriff der Menge verschiedener in ihrer Einheit gesetzten Vielfachen, und sind in dieser Vergleichung Aggreganden und Aggregate, als Theile und Ganze zu betrachten; so muß also die nemliche Wiederholung der Einheit, welche das Maaß der Aggreganden ist, auch das des Aggregats seyn; Aggregate und Aggreganden bezeichnen also ein Gleichvieles, — sie sind sich gleich (S. 26. u. 27.) und wie sich nun gleiche Größen substitui-

ren lassen, (S. 26.) so lassen es sich also auch Summanden und Summen, daher es denn einerley, ob man in bestimmten Zahlen setzt e + f = d, oder wie man allgemein sich ausdrückt e + f = (e + f) S. 33.

b. In der Subtraction dagegen, welche nach ihrem Begriff und Wesen, S. 39. u. 40. die der Addition entgegengesetzte Modification ist, giebt der Rest eine Ergänzung zum Ganzen, nemlich zum Subtractor gesetzt, und diesen (nach S. 39.) als einen vom Minuend weggenommenen Theil dieses betrachtet, wo, wenn a — b = d, wiederum d + b = a (nach S. 39. h.) geben muß. Denn hier ist sonach a (der Minuend) ein Ganzes, (nach S. 18. d.) und b + d (Diminutor und Rest) die solches gebende Theile zusammen, oder die würklichen Theile von a. Wird nun — b, der Diminutor, als ein Theil von a, alleine gesetzt; so muß es also ausser ihm noch (nach S. 17.) einen Nebentheil d geben, welcher mit b zusammen, dem ganzen a gleich ist, welcher also ein Nebentheil von b, und als solcher zu b gesetzt, (nach S. 17. d.) die Ergänzung vom Ganzen (von a) ist. Daß dieses aber nothwendig der Rest sey, wenn eine Größe durch die Subtraction modificirt worden, fließt als nothwendige Folge aus dem Begriff und Wesen dieser Modification, S. 39. u. 40.

c. Sind nun aber also der Diminutor mit seinem gelassenen Reste, wiederum gleich dem Minuend; so

bezeichnen also Minuend, imgleichen Diminutor und Rest zusammen, wiederum ein Gleichvieles, daher es einerley, ob man bestimmt sich ausdrückt e — f = d, oder aber e — f = (e — f) denn e — f = d, giebt d + f = e, und e — f giebt auch e — f + f = e. (S. 39. h. 41. d. u. e.)

Satz 46. Man findet also durch die Addition sowohl, als durch die Subtraction, (nach S. 45.) das einer bekannten Größe entsprechende unbekannte Gleichviele, und es fassen daher beide zusammen den ersten Grund der eigentlichen so genannten Gleichungsrechnung in einfachen, (oder Stammgleichungen, wie wir sie lieber nennen wollen,) in sich.

Wenn in dem wesentlichen der Modification einer Sache, nichts ihrem eigentlichen Wesen widersprechendes liegen darf, wenn sie anders nicht aufhören soll, das zu seyn, was sie ihrem ersten Wesen nach seyn sollte; so kann überhaupt genommen, alle mögliche Größenmodification, sowohl Vermehrung als Verminderung, (32.) nichts weiter als eine Vergleichung der bekannten Größen seyn, da nach S. 11. überhaupt alle nur mögliche Größenkenntniß, zu Folge dem Wesen der Größe, auf Vergleichung beruhet, nemlich, daß man durch gewisse Vergleichungen mit dem bekannten Wievielen, daraus ein, diesem entspre-

chendes Gleiches, — Gleichvieles, für das gesuchte unbekannte Wieviele findet. Denn, ein noch unbekanntes Wieviele zu erfinden, welches dem schon bekannten Wievielen als gleich entspricht, ist ja einzig und allein der Zweck der Größenmodification, oder des arithmetischen Verfahrens. Da nun aber nach S. 11. alle Größe nur aus Vergleichung, und zwar nur mit sich selbst erkannt werden kann; so siehet man, daß die unbekannte gesuchte Größe durch keinen andern Weg, als durch die Vergleichung mit den schon bekannten gefunden werden möge, — denn womit sollte sie sonst verglichen werden können? — und sie ist richtig gefunden, wenn sie mit den schon bekannten eine Gleichung, d. i. den Ausdruck eines entsprechenden Gleichen, Gleichvielen giebt. Daher denn auch der Begriff des arithmetischen Verfahrens, oder der Größenmodification, S. 31. noch dahin determinirt werden muß: die Vornahme gewisser Veränderungen mit den Größen, um aus dem schon bekannten, ein noch unbekanntes Wieviele zu erforschen. L. d. R. Seite 12.

Nehmen wir nun die Addition, so sehen wir: daß uns diese, nach S. 45. durch eine solche Vergleichung in ihrem Aggregat eine Größe giebt, welche den unter sich verglichenen Aggreganden, ein entsprechendes Gleichviele, — ein Gleiches ist, und das Aggregat ist richtig gefunden, wenn es mit den Aggreganden zusammen eine Gleichung giebt. Eben so giebt eine

nemliche Vergleichung in der Subtraction eine neue Größe, welche als eine Ergänzung zum Ganzen (45.) mit ihrem Nebentheil (dem Subtractor) zusammen, die Gleichung mit der bekannten Größe (dem Minuend) giebt. — Ferner, da Subtraction und Addition (nach S. 39. h.) einander wechselseitig zur Probe dienen, und e — f + f = e ist, also in dieser Rücksicht, nach dort angeführtem Grunde, die eine zur andern als Probe angewandt, sie in dieser Vergleichung wiederum eine Gleichung, — den Ausdruck eines entsprechenden Gleichvielen, geben, (denn e = e — f + f) und auf Vermehrung und Verminderung alle mögliche Größenmodification beruhet; so fassen sonach beide zusammen, ihrem Wesen nach, den Grund der Gleichungsrechnung (Algebra) in gegebenen einfachen, oder Stammgleichungen in sich.

Denn in der Gleichungsrechnung soll sonach, nach dem Namen dieser Größenmodification, aus der Vergleichung von gegebenen Wievielen, ein noch unbekanntes Wieviele x (y oder z) gefunden werden, das mit den schon bekannten eine Gleichung giebt, d. h. mit diesem ein und das nemliche Wieviele, ein Gleiches, Gleichvieles ausdrückt; daher man auch eine Gleichung definirt durch den doppelten Ausdruck von einerley Größe, als: $x + ab/c = dm - x$; $7 + 8 - 3 = 9 + 3$; $4 \times 5 - 6 = \frac{2}{3}^{8} + 4\frac{2}{3}$, s. d. R. 384; und es beruht also die Gleichungsrechnung auf den Gesetzen der Addition und Subtraction.

Anmerk. Da aber (nach 13. a.) jede Größe entweder in ihrer Eigenthümlichkeit, oder nur als Verhältniß betrachtet wird, und dieses also auch bey ihrer Vergleichung in der Gleichungsrechnung statt findet; so muß unser gegebenes Gesetz dahin beschränkt werden: daß nur in sofern die Gesetze der Addition und Subtraction den Grund des Verfahrens in der Gleichungsrechnung in sich fassen, als sie sich mit selbstständigen, oder eigenthümlichen, ausser Verhältniß gesetzten Größen beschäftiget, weil in der Addition und Subtraction selbst von keinen andern, als eigenthümlich gesetzten Größen die Rede ist. Die Vergleichung von dergleichen eigenthümlichen Größen, wollen wir nach ihrer Bestehung, Stammgleichungen nennen, weil sie gleichsam der Stamm, oder fernere Grund, von den in Verhältniß gesetzten und höhern Größen sind, so wie Addition und Subtraction, auf welche sich diese Rechnungsarten gründen, und daher ableiten, die Stamm- oder Urarten von allen Größenmodificationen sind. Denn kein Verhältniß kann als solches wiederum etwas enthalten und ausdrücken, was seiner Eigenthümlichkeit widerspräche, und sonach auch nicht im Verhältniß gesetzte Größen, diese müssen immer den Gesetzen für eigenthümliche Größen entsprechen, wie wir bald weiter unten sehen werden.

Satz 47. Bleiben wir nun bey den, S. 46. angeführten Stammgleichungen stehen; so fließen

aus den allgemeinen Gesetzen für Addition und Subtraction, für sie selbst folgende allgemeine Gesetze.

a. Sind in einer Gleichung beiderseits gleiche Theile anzutreffen; so kann man sie, wenn sie nemlich einerley Zeichen haben, unbeschadet des Werthes der Gleichung, beiderseits ausstreichen, nach S. 43. a.

Wenn $a + b = c + b$

so ist $a = c$

denn man darf nur beiderseits b subtrahiren, so bleibet gleiches übrig.

$(6 + \beta = (7 - 1) + \beta)$

Eben so, wenn $a - b = c - b$

so ist $a = c$,

Denn man darf nur beiderseits hier b addiren, so kömmt wiederum Gleiches heraus, denn so erhält man $a - b + b = c - b + b$, also $a = c$: und sonach

b. Man kann in einer Gleichung alle Zeichen umkehren, es kommt doch wiederum Gleiches heraus.

Wenn $a + b - c = d - e$

so ist $-a - b + c = -d + e$;

$$\left\{\begin{array}{c} 6 + 3 - 2 = 12 - 5 \\ -6 - 3 + 2 = -12 + 5 \\ \text{giebt } -7 = -7 \end{array}\right\}$$

Denn man thut hier im Grunde weiter nichts, als daß man wechselseitig, (nach S. 43. a.) Gleiches von Gleichem abzieht, und wieder zuaddirt, wo denn durch beide Fälle die Größen selbst gleich bleiben. S. 41. d. e.

c. Wie man (nach b.) unbeschadet der Gleichung, alle Zeichen in ihr umkehren kann; so kann man die Glieder der Gleichung selbst verwechseln.

Denn, wie ihrem Wesen nach jede Gleichung aus zween Gliedern bestehen muß, indem dies nothwendig ihr Begriff (S. 45. u. 46.) involvirt, so bedeuten also in jeder Gleichung die Glieder ihrer, Aggregate, oder Ganze als solche genommen, die sich in dieser Natur zu den einzeln in ihnen gesetzten Größen, gegen diese wiederum wie Aggregate, oder als solche gesetzte Ganze, zu ihren Aggreganden, oder sie gebenden Theilen (S. 33.) verhalten. Was nun von den Theilen gilt, muß auch von dem Ganzen selbst gelten, kann man daher (nach b) diese einzelne Theile unbeschadet der Gleichung verwechseln, so daß man nemlich ihre Zeichen verändert; so muß man auch die Glieder der Gleichung, wenn man solche unter n und m, als zwo gleiche Summen sich vorzustellen hat, unbeschadet des Werthes der Gleichung selbst verwechseln können, und es muß allemal wenn $n = m$, auch $m = n$ seyn, weil sonst n und m nicht sich selbst gleich seyn, und

also auch keine Gleichung hätten geben können, da gleiche Größen (nach S. 26.) in aller Rücksicht sich müssen substituiren lassen können.

Hieraus fließt weiter folgendes allgemeines Gleichungsgesetz:

d. Man kann eine jede Gleichung so einrichten, daß auf einer Seite o bleibet, indem man alle Größen des einen Gliedes mit verwechselten Zeichen in das andere bringet. Es heißt dieses Verfahren: eine Gleichung annulliren.

Es sey $a + b - c = d - e$,

so ist $a + b - c - d + e = o$,

oder $o = d - e - a - b + c$.

(So stehet sonach die unter b in Zahlen gegebene Gleichung $6 + 3 - 2 - 12 + 5 = o$.)

Denn hier wird sonach nun der Subtrahend dem Minuend gleich, und sie heben also einander auf. S. 41. c.

e. Wie nach S. 43. b. wenn von zwoen ungleichen Größen, Gleiches abgezogen wird, der größere Minuend, auch einen größern Rest läßt; oder von zween gleichen Minuenden ungleiches abgezogen, der größte Diminutor wiederum den kleinsten Rest läßt; so können auch bey einem Ausdruck

ungleicher Größe, die Theile eben so wie bey gleichen Größen, (nach b) von einer Seite mit veränderten Zeichen auf die andere gebracht werden, ohne daß dadurch der Werth des veränderten Ausdrucks verändert werde.

Wenn z. B. a + b — c ≺ d — e
so ist auch a + c ≺ d — b + c,

denn, Ungleiches zu Ungleichem addirt, oder subtrahirt, giebt Ungleiches, und was größer war, bleibt größer. S. 37. 38. u. 43. b. Nun ist aber die Versetzung der Größen, aus einem Gliede der Gleichung in das andere, nichts als eine Addition und Subtraction gleicher Größen in beiden Gliedern.

Satz 48. Aus diesen, S. 47. aus der Addition und Subtraction abgeleiteten allgemeinen Gesetzen für in Gleichung gesetzte Größen, fließen nun folgende nähere, für das Gleichungsverfahren mit Stammgleichungen, um aus den bekannten Größen, die unbekannte x (y oder z) zu finden.

a. In einer Gleichung kann jede einzelne Größe von der einen Seite auf die andere, d. i. von einem Gliede der Gleichung in das andere gebracht werden, wenn man nur das Zeichen verändert, und — anstatt +, und umgekehrt schreibet.

Der Grund hiervon liegt in S. 47. b. u. c. denn was von dem Ganzen, das gilt auch von den Theilen.

Es sey $a + b = c$,
so ist $a \ldots = c - b$,
oder $b = c - a$,
denn man subtrahire hier nur beiderseits b oder a. (S. 47. a.)

Es sey $a = c + d$,
so ist $a - d = c$
oder $a - c = \ldots . d$,
man subtrahire hier nur (nach S. 47. a.) beiderseits d oder c.

Es sey $a - b = c$
so ist $a = c + b$;
oder
Es sey $a = c - d$
so ist $a + d = c$;
denn man darf hier nur (nach S. 47. a.) im ersten Ex. beiderseits b, und im zweiten d zuaddiren.

Es sey $a + b - c = d + e - f$
so ist $a - e + f = d - b + c$;
denn nach S. 47. subtrahirt man hier beiderseits b und e, und addirt ebenfalls wiederum beiderseits c und f, wodurch also der Werth der Gleichung ungeändert bleibt. Man kann sich dieses Ex. nur also vorstellen.

$$a + b - c = d + e - f$$

subt. $b = b$

$$a - c = d + e - f - b$$

add. $c = c$

$$a = d + e - f - b + c$$

subtr. $e = e$

$$a - e = d - f - b + c$$

add. $f = f$

$$a - e + f = d - b + c.$$

Es bestehet also überhaupt das Gesetz für die Auflösung einer Gleichung mit Stammgleichungen:

„Man subtrahire beiderseits die Größen, welche „das Zeichen + haben, und addire beiderseits „die Größen mit dem — Zeichen.

b. Da nun ihrem Wesen nach, (laut S. 46.) jede mögliche Größenmodification nichts weiter als eine Gleichung ist, um nemlich aus der Vergleichung der bekannten Größen, die unbekannte zu erfinden, und diese richtig gefunden ist, wenn sie mit den schon bekannten eine Gleichung, den Ausdruck eines entsprechenden Gleichen, Gleichvielen giebt; so fließt hieraus weiter das Gesetz für das Verfahren in der Gleichungsrechnung, um die unbekannte Größe x, (y oder z) zu finden

„Man sehe die unbekannte Größe x (y oder z)
„gerade so an, als ob dieselbe schon gefunden wä-
„re; und nehme sodann mit den schon bekannten
„Größen eben die Rechnungsarten vor, welche
„man anzustellen hätte, wenn über die zufinden-
„den Größen die Probe (39. h.) gemacht werden
„sollte, nemlich daß man nun nach a dieses Sa-
„tzes weiter also verfahre:

„Man läßt die durch Gleichung zu findende
„unbekannte Größe alleine auf einer Seite ste-
„hen, und bringt die übrigen bekannten alle mit
„verwechselten Zeichen auf die andere Seite; so
„giebt diese den Werth der unbekannten.

Z. B. Ich denke eine Zahl, wenn ich 7 dazu ad-dire und 9 subtrahire, so bekomme ich 100. Nennen wir nun die unbekannte Zahl x, so ist:

$$x + 7 - 9 = 100,$$

folglich
$$x = 100 + 9 - 7,$$
$$\text{oder} = 109 - 7$$
$$\text{also} = 102$$

für diese gesuchte Zahl. Man vergleiche L. d. R. S. 391=395, 2.

NB. Indem wir so hier S. 47. und 48. die allgemeine Gesetze für Stammgleichungen, und das Verfahren mit solchen gegeben haben; so haben wir in ihnen (nach S. 46. Anmerk.) zugleich auch die allgemeinsten Gesetze für jede in Verhältnissen gegebene, oder höhere Gleichungen aufgestellt.

Satz 49. Zu dem was wir oben S. 22. 23. u. 24. von dem Wesen und der Entstehung rationeller Größen gesagt haben, haben wir nun hier nach Form der mathematischen Methode, und bevor wir zu den Rationen der Größen und deren Modificationen nun weiter gehen, noch als auf angeführtes sich beziehend, folgende zwey allgemeine Gesetze aufzustellen:

a. Wenn die endlichen Größen a, b, Irrationalgrößen sind, und b $\succ$ a ist, so giebt es für jeden aliquoten Theil c, den man von a annimmt, ein solches Vielfache m c, daß m c $\prec$ b, aber m c $+$ c $\succ$ b ist.

Denn, da b $\succ$ a, und c angenommen, ein aliquoter Theil von a ist, so ist (nach S. 30. b.) b $\sqsupset$ c $+$ c, und (zu Folge S. 22.) c kein Maaß von b; also giebt es allemal ein dergleichen Vielfaches m c, daß m c $\prec$ b, aber m c $+$ c $\succ$ b ist. (laut S. 44. c.) Dagegen,

b. Wenn die endlichen Größen a, b, Irrationalgrößen sind, und b $\succ$ a ist; so giebt es für jeden aliquoten Theil c, den man von a annimmt, ein solches Vielfaches m c, daß b $-$ m c $\prec$ c ist.

Denn es giebt (nach a. dieſes S.) ein ſolches m c, daß m c ≻ b, aber m c + c ≻ b iſt. Da alſo m c ≺ b, folglich (nach S. 35. e.) b = m c + p, aber m c + c ≻ b iſt; ſo iſt m c + c ≻ m c + p, (laut S. 30.) folglich iſt c ≻ p. (nach S. 43. b.) Nun iſt (zu Folge S. 41. a.) p = b — m c, folglich c ≻ b — m c, (S. 30.) alſo b — m c ≺ c.

Je kleiner alſo (dort S. 24. b.) der aliquote Theil c von a angenommen wird, um deſto kleiner wird b — m c, d. i. deſto weniger unterſcheidet ſich das mögliche Vielfache des Maaßes c von der Größe b.

Zweeten Theiles

III. Abschnitts Kap. II.

Allgemeine Modificationsgesetze der Verhältnißgrößen.

Einleitung.

Von den Verhältnissen.

Satz 50. Die Bestimmung einer Größe durch eine beygesetzte andere ihrer Art, giebt die Ration, oder das Verhältniß; so deutet der Ausdruck e ∴ f (e zu f) im allgemeinen, zwo in Verhältniß zu einander gesetzte Größen an, durch welche an sich keine eigenthümliche, oder reelle, sondern eine blos ideelle, erst zu erzeugende reelle Größe angedeutet werden soll, nach Maaß, daß man die eine so viel male vergrößere, als die an-

dere durch ihre eigenthümliche Einheit anzeigt; oder daß man die eine, nach S. 24. durch die andere messe, um sie durch diese, als durch ihr angenommenes Maaß, in dieser Vergleichung zu bestimmen. Verhältnißmäßige Größen haben also an sich betrachtet in der That keine Eigenthümlichkeit, sondern sie erhalten solche erst, nachdem man sie würklich, nach Anzeige der andern beygesetzten Größe, entweder um soviel mal vermehrt, oder durch solche gemessen, und nun in dieser Vergleichung bestimmt hat.

Alle diese Gesetze, welche wir bisher für die Modification der Größe angeführt haben, betrafen nur die eigenthümlich gesetzte Größe, d. i. die als ein in der That würkliches ausgedrücktes Wieviele. So wie aber nach der allgemeinen logischen Form, nach S. 13. a. jedes Denkbare, und also auch das Wieviele, welches sich von solchem behaupten läßt, entweder als Sache oder nur als Verhältniß erscheint, und also jede Größe ebenfalls nicht nur in dieser doppelten Rücksicht, wie wir S. 22. 23. u. 24. gesehen, betrachtet werden kann; sondern sonach auch das verhältnißmäßige Wieviele, nach S. 8. c. seiner Modification fähig seyn muß, so haben wir denn nun von hier an in dem Beschlusse dieses Abschnittes von den allgemeinen Gesetzen für solche zu handeln. Nothwendig muß denn hier nun aber beständig auf die allge-

meinen Gesetze für die Entstehung rationeller Größen, also auf S. 22. bis 25. Rücksicht genommen werden.

a. Da aber wiederum Verhältnisse nur etwas ideelles ausdrücken, welches nach aller Analogie unsers Vorstellungsvermögens, erst aus und von einem reellen abstrahirt seyn muß, und also Verhältnisse nur in dem Grade sich der Wahrheit nähern, in wiefern sie ihrer Abstammung und Entlehnung entsprechen; so kann demnach kein Verhältniß etwas enthalten und ausdrücken, was seiner Eigenthümlichkeit oder Würklichkeit in der That widerspräche: und daher können denn so auch im Verhältniß gesetzte Größen nicht anders, als jenen bisher angeführten allgemeinen Gesetzen für eigenthümliche Größe entsprechend erscheinen, und die Gesetze für sie können nichts weiter, als eine besondere Anwendung nur von jenen auf sie enthalten.

b. Die Bestimmung, die ein etwas durch ein ihm beygesetztes andere, mit dem es in einem ideellen Zusammenhange betrachtet wird, erhält, heißt überhaupt die Ration, das Verhältniß, nemlich ein Etwas, das sein Seyn erst erhält durch die Würkung eines andern, mit dem es in der Idee zusammengehängt wird. Besser wird auch hier vielleicht die Natur der Sache durch die lateinische und französische Benennung, welche soviel als Grund andeuten möchte, ausgedrückt, nemlich ein Etwas, das seinen Grund in Vergleichung mit und von einem andern er-

hält; (S. 1. i. x.) und so denn nun in Anwendung auf Größe, rechtfertigt sich also unsere im Satze gegebene Definition; wie sich denn solche auch schon aus der Entstehung rationeller Größe, S. 22. erweiset.

c. Betrachtet man nun aber eine Größe im Verhältniß gesetzt, so folgt aus dem Wesen des Begriffes eines Verhältnisses, daß nothwendig zwo Größen in Verbindung gesetzt seyn müssen, welche dann die Glieder (das Vorder- und Hinterglied) des Verhältnisses heissen: und zwar müssen diese in einer solchen Verbindung stehen, daß die eine davon kein würklich gesetztes, sondern nur ein ideelles Wieviele, beziehungsweise gegen die andere ihr beystehende Größe, ausdrückt; nemlich, ein nach Maaß vermehrtes, je nachdem die andere beygesetzte durch ihre eigenthümliche Einheit ausdrückt; oder, ein solches Wieviele, dessen eigentliche Bestimmung erst durch Messung mit der andern, ihr zum Maaß beygesetzten Größe, nach dieser bestimmt werden soll; also in dem Ausdruck e ⁘ f, muß eine von beiden Größen ideell, die andere reell gesetzt seyn, da überhaupt metaphysisch genommen, (nach a.) kein Verhältniß als etwas ideelles statt finden kann, wenn es sich nicht auf eine in der That existirende Würklichkeit gründet, und das Verhältniß nur in dem Grade Wahrheit enthält, als es der Sache, durch die es bestimmt wird, entspricht; so ist also auch hier in der Mathematik, von zwoen in Verhältniß gesetzten Größen, nach dem allgemeinen metaphy-

sischen Begriff vom Verhältniß, (b.) diejenige Größe, welche der andern Vermehrung oder Verminderung nach ihrer Einheit bestimmt, als ein würklich in der That Existirendes, oder, wie wir in der Mathematik es ausdrücken, als eine eigenthümliche Größe gesetzt, denn sie enthält den Grund der andern in sich, und muß also nothwendig selbst eine eigenthümliche Größe seyn; so wie jene es dagegen nicht seyn konnte, weil sie ihr Wesen nicht in sich selbst, sondern erst in der ihr beygesetzten hatte.

Also, von den beiden ein Verhältniß gebenden Größen ist allemal eine ideell, die andere reell, oder eigenthümlich gesetzt.

d. Welche von den beiden Größen man aber in dem allgemeinen Ausdruck e : f für ideell oder eigenthümlich annehmen mag, ist willkührlich. Denn, nimmt man e ideell, so ist f reell, und umgekehrt, das Verhältniß bleibt immer das nemliche, weil einmal (nach S. 31. Anm.) e + f, und f + e gleichgiltige Ausdrücke bezeichnen; und zweitens, da dieser Ausdruck e : f nichts anders als eine Vermehrung oder Verminderung andeuten will, sich diese beide Modificationen nach S. 39. h. so entgegengesetzt sind, daß sie einander wechselseitig zur Probe dienen, einander wiederherstellen, und also in einer Gleichung sich mit einander verwechselten (S. 47. b. c.) Zeichen einander substituiren lassen.

e. Zeigt nun nach dem Begriff e ⁘ f, dieses nothwendig eine Modification an, welche mit einer von diesen beiden Größen, sey's mit e, oder f vorgenommen werden soll: kann diese aber keine andere, als Vermehrung, oder Verminderung seyn, weil (nach S. 31. u. 32.) es ohnmöglich, daß es noch eine dritte geben könne; so soll hier (nach c.) die eine, sey's (nach d.) e oder f, um soviel mal vermehrt werden, als die andere anzeigt, oder sie soll durch m maliges Vergleichen mit der ihr beygesetzten andern reellen bestimmt, oder gemessen werden. Dieses liegt in dem Wesen des Begriffes eines Verhältnisses, denn e ⁘ f kann nicht etwa heissen: = e ✝ f, oder e — f, und umgekehrt, denn da drückten ja, sowohl e als f beide eigenthümliche Größen, gegen allen metaphysischen Begriff von einem Verhältniß (c.) aus, sondern wenn hier (angenommen) e, erst durch das eigenthümlich gesetzt angenommene f seine Bestimmung erhalten soll, und an sich selbst also keine eigenthümliche Größe ausdrücken kann; so kann demnach der Ausdruck e ⁘ f nichts anders heissen, als daß man 1) das eigenthümliche, das e ausser Verhältniß zu f gesetzt an sich hat, so viele male zu sich selbst setzen, d. h. so viele male vermehren solle, als das in seiner Eigenthümlichkeit angenommene f durch seine Einheit ausdrückt; wie denn dieses auch nothwendig nach dem Entstehungsgesetz rationeller Größen, S. 22. seyn muß, daß, wenn f als ein Vielfaches von m a, so mit einem andern Vielfachen e, das auch = n a, (m und n für jede

Menge, a als die Einheit angenommen) verglichen werden soll, daß daraus ein neues Vielfache z entstehe, das sowohl durch e als f gemessen, oder bestimmt werde, man nicht setzen könne e ✝ f, sondern daß man e so viele male nach seiner Eigenthümlichkeit, als es in sich = n a, setzen müsse, wie oft f durch die Menge der in ihm enthaltenen Einheiten, der in ihm enthaltenen m a ausdrückt. Wo denn, wenn denn nun so z, sowohl aus f maliger Setzung e, als auch umgekehrt entstanden, es nothwendig durch e sowohl, als durch f sein Verhalten erhält, d. i. genau durch solches gemessen wird. Denn die Größe z, die so durch m f aus e und umgekehrt erzeugt wird, muß nothwendig auch gleich seyn m f mal e, und umgekehrt, weil sie anders gegen S. 27. nicht mehr sich selbst gleich wäre. — Oder 2) wird durch den Ausdruck • ⁘ f verlangt, daß z. B. e nicht in seiner Eigenthümlichkeit genommen, sondern aus ihm solche erst erfunden werden soll, wenn man sie durch f, als der ihr beygesetzten andern Größe mißt; so muß hier ebenfalls wiederum, nach dem Begriffe des Messen, S. 24. mit der ideell gesetzten Größe e eine m malige Modification durch das sie bestimmen sollende reelle Wieviele f vorgenommen werden; nemlich f als ein Maaß von e, muß versucht werden, wie oft viele male es in e enthalten sey, und die Benennung solches m maligen Enthaltenseyns des Maaßes f in e giebt nun das Verhalten, oder die Bestimmung des Wievielen von e, wenn man es in diesem Messungsverhältniß zu f setzet.

Wie nun aber hier im ersten Falle eine m malige Vermehrung der ideellen Größe statt findet; so dagegen bey der Messung eine m malige Verminderung. Denn, e durch f messen, will (nach S. 24.) nichts anders sagen, als: die eine Größe e, in lauter solche Theile zerlegen, als f, die andere zum Maaß gesetzte Größe, als ein m faches der Einheit, angiebt, und nun dieses m malige Zerlegen benennen durch eine Zahl, und zwar nun als eine Eigenthümlichkeit bezeichnende Zahl ausdrücken.

Alle in Verhältniß gesetzte Größen drücken daher an sich eine Vergleichung aus, um ein wievielmales in dieser angenommenen Vergleichung, die eine größer oder kleiner als die andere sey, (S. 11. c. d. e.) und die gefundene Größe x, wenn man setzet e ⁘ f = x, welche dieses bestimmt, heißt daher der Name, der Exponent des Verhältnisses e ⁘ f, (S. 13. a.) der nun als solcher anzeigt, daß in dieser Vergleichung e um x mal größer als f, und f dagegen um x mal kleiner als e sey. Der Exponent drückt also seinem Wesen nach nur eine ideelle Größe aus. Auch ergiebt sich zur Regel für seine Erfindung, als eine nothwendige Folge aus dem bisher gesagten, in Vergleichung mit S. 22. a. und b. daß man hier (nach e. 2. und S. 24.) entweder e durch f, oder f durch e messen müsse, wo dann x der bestimmte Ausdruck für die gefundene m malige Anwendung des gebrauchten Maaßes ist, und also eine rationelle oder irrationelle Zahl seyn muß. S. 22. a. b.

f. Wie nun aber jedes ideelle Würklichkeit in der That haben muß, so bald dessen völliger Grund sich in der That erweisen und zeigen läßt, und es in der Erfahrung sich in der positiven Bestimmung eines existirenden Etwas (S. 1. h.) erweiset; so muß also auch, obgleich e ⁘ f, nur den Ausdruck einer ideell vermehrten, oder verminderten Größe giebt, dagegen die, durch die würklich vorgenommenen Modificationen erzeugte neue Größe y, als eine eigenthümliche Größe erscheinen, und zwar wird nothwendig, welcher Gestalt e ⁘ f war, auch die neu erhaltene Größe y nothwendig seyn müssen, weil y als das aus dem möglich gesetzten e ⁘ f erzeugte Würkliche, als solches, seiner es erzeugenden Möglichkeit nicht widersprechen kann; und da nun e ⁘ f den Grund von y in sich fassen, wenn die positive Bestimmung der würklichen Modification hinzukommt; so kann y, als die Folge nichts e ⁘ f, als seinem es erzeugenden Grunde ungleiches ausdrücken.

Eben daher muß auch der Exponent x jedesmal gleichartig seyn mit e ⁘ f, denn in dem Namen kann nichts dem durch ihn bezeichneten Fremdes enthalten seyn. (nach a. dieses S.)

g. Da aber nur Dinge, die unter einerley Bestimmung stehen, so im Zusammenhange gestellt werden können, daß durch ihre Würksamkeit auf einander, ein ihnen beiden entsprechendes dritte entspringt; so

können also in jedem Verhältniß auch nur gleichartige Dinge gestellt werden. Ist daher von irgend einem Verhältniß der Größe zwoer Dinge die Rede; so müssen nothwendig in dem Ausdruck e ⁘ f, beide Glieder dieses Verhältnisses gleichartige Dinge, als deren verhältnißmäßige Größe gesetzt ist, bezeichnen, indem sonst die, durch die würklich vorgenommene Modification erhaltene reelle Größe y, ja weder mit dem einen noch mit dem andern Gliede gleichartig, und also das würkliche mit seinem ideellen, oder möglich gesetzten nicht (nach f. u. a. dieses S.) gleichstimmig seyn könnte; auch es wider das erste Gesetz für Größenmodification, aus eben angeführtem Grunde, verstieße, nach welchem sich nur mit Gleichen in Gleiches arithmetisch verfahren läßt. (S. 24. 34. 39. i. 50. a.) Daher, wenn es sich gleich trift, daß man an sich verschiedene Dinge im Verhältniß setzet; so kann man metaphysisch mathematisch dieses nicht anders, als nur in sofern, in wiefern man bey ihnen, die ihnen gemeinschaftliche Bestimmung ihrer Größe ihres eingebildeten, oder reellen Werthes in diesem Zusammenhange einzig und alleine betrachtet. ℔ und Rthlr. ꝛc. können also nie anders, als nur unter dieser Bestimmung zu einander ein Verhältniß geben. Siehe l. d. R. S. 3.

h. Der Ausdruck e ⁘ f bezeichnet also im allgemeinen jede Größe, die als ein ideelles gesetzt, ihre Bestimmung erst von der andern ihr beygesetzten erhalten

soll, je nach Maaß, daß man sie mit der andern vermehrt, oder vermindert. Da Vermehrung und Verminderung aber einander entgegengesetzte Rechnungsarten sind, und, welche von beiden Modificationen angewendet werden soll, durch die bloße Verhältnißsetzung noch nicht bestimmt wird; so folgt daraus, daß man sich in der Bezeichnung von einem Verhältniß, (ausser dem Additions- und Subtractionszeichen, da diese Eigenthümlichkeit bemarken) jedes andern willkührlichen Zeichens, (wie wir e ⁘ f wählen wollen) nur nicht des bisher allgemein gewöhnlichen Leibnitzischen (:) als welches mit der Dimension einerley ist, bedienen könne. Denn, ausserdem daß dieses zu Verwechselungen Anlaß geben kann, so ist es metaphysisch unrichtig, die Modification einer Sache, gleich dieser selbst bezeichnen zu wollen, da zwischen Modification und Sache, zwischen Folge und Grund, ein zu großer Unterschied ist, als daß sie unter einerley Bezeichnung gestellt werden dürften. — Doch, da Zeichen und bezeichnete Sache sich entsprechend seyn müssen, daher unser gewähltes Zeichen ⁘.

Satz 51. Das Verhältniß drückt so seiner Natur nach eine Messung der in ihm gesetzten Größen aus, nemlich der einen durch die andere, und, in wiefern diese, in diesem Zusammenhange gesetzte Größen einander genau, oder nicht messen, entstehen daher Verhältnisse rationeller, oder irrationeller Größen.

Denn, ist der Begriff des mathematischen Verhältnisses, das in dem Ausdruck e ∴ f, entweder e durch f oder umgekehrt, (S. 50.) bestimmt werden soll; so heißt ja dieses nichts anders, als e durch f, oder umgekehrt, messen, da die Bestimmung eines Wievielen, dessen Messung heißt, (S. 24.) und ganz deutlich haben wir daher den Begriff eines mathematischen Verhältnisses, daß der Ausdruck e ∴ f nichts weiter sagen will, als: von zwoen gleichartigen Größen eine zum Maaß der andern annehmen, und durch diese Vergleichung das Verhalten, die Ration der andern angeben, — ihr Wievieles bestimmen, das sie in dieser Vergleichung gegen diejenige, die man zu ihrem Maaße in dieser Vergleichung annimmt, habe.

b. Messung einer Größe durch eine ihr gleichartige andere, setzt aber eine Modification ihrer voraus, der sie nach Maaßgabe der andern, durch die sie zu messen, unterworfen werden soll, und dies kann sonach nichts anders heissen, als: daß sie nach Maaßgabe der andern vermehrt, oder vermindert werden soll, weil kein drittes hier nicht statt finden kann; und zwar soll aber hier dieses um so viele male geschehen, als die Einheit des Maaßes anzeigt, nach S. 50. e.

c. In wiefern nun aber in dem Ausdruck e ∴ f, wenn wir f zum Maaß von e annehmen, und würklich e durch f messen, dieses (nach S. 11. c.) heißt, das Wieviele f, als ein Gleichartiges von e annehmen,

und nun durch Vergleichung finden, in wiefern f ein Theil von e sey, oder nicht, und wieviel mal, (50. e.) e als ein Ganzes genommen es f, als eine in Zusammensetzung bestehende Einheit, zu seinem Maaße enthalte, (nach S. 11. und den Gesetzen für Entstehung rationeller Größen S. 22.) so heißt also e durch f messen, (nach S. 22.) das Verhalten, — Bestehen, — die Ration von e finden durch die zu seinem Maaße angenommene Größe f.

NB. Wir sehen also hier noch einen Grund zu S. 50. g. verglichen mit S. 24. warum nur gleichartige Größen im Verhältniß stehen können.

NB. 2. Nothwendig muß aber hier f, als das rationell gebrauchte Maaß, ein in der Einheit gebrauchtes Vielfache angenommen werden, nach dem Entstehungsgesetz für rationelle Größen, S. 22. NB.

d. Ferner wird sich denn hier zeigen, daß f so in dieser Natur, als Maaß von e gebraucht, wenn nach dem Wesen der Entstehung rationeller Größen, (S. 22. a. NB. 2.) $f = ma$, und daß $mf = e$, also f ein Aliquotum von e, und durch m f also e genau gemessen werde, daß mithin e und f selbst (nach S. 22. a.) rationelle Größen gegen einander sind; und ist dieses, daß zwo so im Verhältniß gesetzte Größen, genau die eine die andere misset, sie selbst gegen einander rationelle Größen sind; so heißt das Verhältniß, in welchem sie gesetzt, ein Verhältniß rationeller Größen.

e. Findet sich dagegen in der Vergleichung, daß $f = mc$, aber e dagegen $= mc + p$, oder $= mf + p$, oder umgekehrt, also e und f an sich selbst irrationelle Größen sind, und also (nach S. 22. b.) keinesweges e durch f genau gemessen wird; so heißt das Verhältniß in welchem sie gesetzt sind, ein Verhältniß irrationeller Größen. In wiefern die Möglichkeit solcher Verhältnisse bestehet, ist schon S. 23. gezeigt worden, so wie auch, daß sich dergleichen Größen nie genau bestimmen lassen, und dieses dagegen ganz der Fall bey Verhältnissen rationeller Größen, als wovon schon S. 24. gehandelt worden.

f. Sind nun die rationellen oder irrationellen Größen e, f, die Theile, oder Glieder, welche das Verhältniß e : f geben; so müssen mithin auch die Gesetze, welche wir S. 23. von diesen aufgestellt haben, auch von den Verhältnissen, als den Ganzen selbst gelten.

Satz 52. Will der allgemeine Ausdruck e : f blos anzeigen, daß eine von diesen beiden Größen, nach Maaßgabe der andern, um so viele male vermehrt, oder vermindert werden soll; so wird dieses nun bestimmter ausgedrückt durch e × f, oder e : f, welche bestimmt anzeigen: daß im ersten Falle e um f mal vermehrt, im zweiten, vermindert werden soll; und so geben diese bestimmtere

Ausdrücke die Multiplication und Dimension, als die beiden verhältnißmäßigen Größenmodificationen.

NB. Es giebt sonach auch zweyerley Arten von Verhältnissen, Multiplications- und Dimensionsverhältnisse.

Der Ausdruck e ⁘ f, ist also nach S. 50. u. 51. nur die allgemeine Anzeige, daß hier von diesen beiden Größen die eine ideell zur andern, als einer reellen, gesetzt sey, (S. 50. e.) und nun in dieser Vergleichung ein solches Verhalten, (Würklichkeit) nemlich ihrer Größe, erhalten soll, als diese andere ihr beygesetzte reelle durch ihre Einheit anzeigt, wenn sie nemlich würklich nach Maaßgabe dieser um so viele male vermehrt, oder durch solche mögliche male vermindert würde. (S. 50. e.) Da aber beides hier unbestimmt ist, sowohl welche von beiden Größen ideell, oder reell gesetzt, betrachtet werden soll, (S. 50. d.) als auch welcher Modification diese Größe, nach Anzeige der ihr beystehenden reell gesetzten unterworfen werden soll; so werden beide diese Fälle bestimmt, wenn man setzt e ⁘ f (e . f) (ef) oder e : f, welcher Ausdrücke Bedeutung unser Satz schon erklärt hat.

b. Bleiben wir nun bey dem erstern Ausdrucke e ⁘ f stehen, so ist dieses also der Ausdruck eines solchen Verhältnisses zwoer Größen, wo die eine davon

mögliche male (5o. e.) vermehrt werden soll, d. i. als die andere, als eigenthümlich angenommene die Einheit enthält; denn die Einheit, welche sie in sich als ein Vielfaches begreift, giebt hier das Maaß für die möglich malige Vermehrung der andern, da ausser der Einheit (12. b.) weder Denkbares, geschweige Möglichkeit existiren kann. Das Verfahren giebt die Multiplication, als das verhältnißmäßige Vermehren einer Größe.

A. Wesen und allgemeine Gesetze der Multiplication.

Satz 53. Die Multiplication ist also ihrem Wesen nach weiter nichts, als die verhältnißmäßige Vermehrung einer ideell gesetzten Größe, nach Maaßgabe der Einheit einer ihr beygesetzten andern gleichartigen reellen Größe, zur Erlangung einer dritten, der beiden im Verhältniß gesetzten entsprechenden gleichartigen eigenthümlichen Größe p, welche das Product (hervorgebrachte, — erzeugte) heißt, so wie die beiden in diesem Verhältniß zu einander gesetzten Größen gemeinschaftlich die Factoren (Erzeuger, nemlich vom Product) genannt werden, und zwar nennt man die ideelle, durch eine würkliche zu vermehren gesetzte Größe, das Multiplicandum, so wie letztere dagegen, wel-

che durch ihre eigenthümliche Einheit anzeigt, wie oft die andere ideelle zu sich selbst gesetzt werden müsse, um eine neue, ihr entsprechende eigenthümliche Größe als ihr Product zu geben, den Namen Multiplicator hat.

NB. e wird also durch f multiplicirt, wenn man e so oft zu sich selbst setzet, als f nach seiner Einheit anzeiget, den dies fließt aus dem Begriff der Multiplication.

a. Denn daß der Multiplicationsausdruck e × f, an sich nur, im Gegensatz von dem Ausdruck e ·× f, (S. 50. 51. 52.) eine bestimmte verhältnißmäßige Größe ausdrückt, giebt der für diese Größenmodification genommene algebraische Ausdruck: denn so bezeichnet e × f nur eine verhältnißmäßige Zahl, die blos in dieser Zusammensetzung, nicht aber in ihrer eigenen Eigenthümlichkeit ihren Namen hat, die wohl aus der Vermehrung des einen Factors e oder f entstehet, aber nur durch eine verhältnißmäßige Vermehrung seiner, indem man e entweder f mal, oder f auch e mal zu sich selbst setzet, und das Product e × f = ef ist hier nur der Name dieses Verhältnisses, denn ausser diesem gesetzt giebt e + f keine Größe, welche wäre = ef. (S. 13. a.)

b. Bey dem Multiplicationsverfahren wird demnach einer von den beiden Factoren, als ein Ganzes, wenn es auch in einer noch anderweitigen Vergleichung

als ein Bruch ausgedrückt wäre, (12. d. 13. c.) das an sich schon der Inbegriff eines Vielfachen, (S. 22.) und (nach S. 19. u. 33.) nur in dieser Vergleichung in der Einheit gesetzt ist, angenommen; und nun wird dieser Inbegriff seiner Einheit, die es als eine eigenthümliche Größe für sich hat (S. 50. e.) so oft, oder so viele male zu sich selbst gesetzt, als der andere Factor, ebenfalls ein Vielfaches, (S. 22.) durch seine Einheit (S. 50. e.) anzeiget, so daß also aus e ✕ f eine würkliche Größe p (nach S. 50. f) entstehet, so daß ist p = e mal 1 mal f. Stände z. B. 4 ✕ 3; so ist 4 ✕ 3 = 12 = 1 + 1 + 1 + 1 mal 3, oder = 4 mal 1 + 4 mal 1 + 4 mal 1, nach S. 17. f.

c. Steht daher nach S. 17. f. der eine Factor als ein einzelner Einer ausgedrückt, (also durch die Zahl 1) so bleibt der andere ungeändert, ist so schon durch sich selbst gemessen, da die Einheit das Maaß jeder Größe ist; (19. b.) also a . 1 = a, da nach S. 17. f. n = 1 mal n = n; oder 1 mal n = n ist.

d. Ferner wird daher die Summe zwoer Größen durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man jede von ihnen durch sie multiplicirt, und die Producte addirt, d. i. (a + b) ✕ n = a ✕ n + b ✕ n = na + n b. Denn wenn man die Summe a + b = c setzt, so ist auch a + b + a + b = c + c (S. 36.) folglich 2 a + 2 b = 2 c = 2. (a + b.) Eben daher ist auch 2 a + 2 b + a + b = 2 c + c; (S. 36.)

also überhaupt n a ✣ n b ═ n, (a ✣ b) d. i. a ⋊ n ✣ b ⋊ n ═ (a ✣ b) ⋊ n.

e. Die Differenz zwoer Größen, (d. i. die durch die Subtraction gefundene Bestimmung der Einheit, um welche zwo mit einander verglichene ungleiche Größen verschieden sind,) wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man jede von ihnen durch sie multiplicirt, und das kleinere Product vom größern abzieht, d. i. (a — b) ⋊ n ═ a ⋊ n — b ⋊ n ═ n a — n b. Denn wenn man die Differenz a — b ═ d setzt, so ist a ═ d ✣ b, (S. 41. a.) folglich a ⋊ n ═ (d ✣ b) ⋊ n ═ d ⋊ n ✣ b ⋊ n; (S. 53. d.) also a ⋊ n — b ⋊ n ═ d ⋊ n (S. 41. b.) ═ a — b ⋊ n.

f. Eine Größe wird dagegen durch die Summe ganzer Zahlen multiplicirt, wenn man sie durch jede einzelne multiplicirt, und die Producte addirt; d. i. a ⋊ (m ✣ n) ═ a ⋊ m ✣ a ⋊ n ═ m a ✣ n a. Denn m a ✣ n a ═ (m ✣ n) a (S. 33. u. 17. f.) ═ a ⋊ (m ✣ n.)

In wiefern nun aber Aggregate gleich seyn müssen allen ihren sie gebenden Aggreganden zusammen, und also m ✣ n ═ (m ✣ n), d. i. in Zahlen ausgedrückt 3 ✣ 2 ═ 5 seyn muß; so wird auch jede Zahl a, multiplizirt durch eine Menge, in ihren endlichen Product, gleich seyn müssen dem Product der Summen dieser seiner als Aggreganden gegebenen Factoren,

d. i. 6 . 3 + 2 = 6 . 5; und 6 + 3 . 2 + 3 = 9 . 5.

g. Eben so wird im Gegentheil von e eine Größe durch die Differenz zwoer ganzen Zahlen multiplizirt, wenn man sie durch jede einzelne multiplizirt, und das kleinere Product vom größern abzieht, d. i. a × (m — n) = a × m — a × n = ma — na. Denn ma — na = (m — n) a (S. 42, c, d) = a × (m — n).

h. Eine Größe wird sonach durch ein Product ganzer Zahlen multiplizirt, wenn man sie nach und nach durch jeden Factor multiplizirt. Z. B. wenn 6 = 3 . 2 ist; so ist a × 6 = a × 3 × 2 = 3 a × 2. Denn 3 a × 2 = 3 a + 3 a = (3 + 3) a (53, f) = (3 . 2) a (53, NB.) = 6 a = a × 6.

Wenn (nach f) die zu einem Factor gegebene Größen m + n gleich seyn müssen ihrer Summe (m + n), von welcher sie als alle deren sie gebenden Aggreganden gesetzt sind; so muß dagegen nach dem Wesen der Multiplication, als einermaligen Addition (b), ebenfalls m . n auch seyn = (m . n), dem aus ihrer maligen Setzung entstehenden Producte: und es muß daher auch jede Zahl a, multiplizirt durch eine Menge gegebener Factoren, in ihrem endlichen Producte gleich seyn, dem Product, das man erhält, wenn man a mit dem Product aus allen den einzelnen Mul-

tiplicationen, von dem sie, als alle dessen malige Theile gegeben waren, sogleich auf einmal multiplizirt. Benannt ausgedrückt, muß also seyn 6 ✕ (3 . 2) = 6 . 6.

Dieses, und das unter f aufgestellte, gelten als zwey Gesetze, nach denen man im practischen Rechnen mit vielem Vortheil verfährt.

i. Ein Product ganzer Zahlen ist also dasselbe, man mag den ersten Factor durch den andern, oder den andern durch den ersten multipliciren, d. i. n ✕ r = r ✕ n. Denn da (S. 17, f) n = 1 mal n = n mal 1; so n ✕ 1 = 1 ✕ n.

n ✕ 2 = n ✕ 1 + n ✕ 1 (f) = 1 ✕ n + 1 ✕ n = 2 ✕ n (d);
n ✕ 3 = n ✕ 2 + n ✕ 1 (f) = 2 ✕ n + 1 ✕ n = 3 ✕ n (d);
n ✕ 4 = n ✕ 3 + n ✕ 1 (f) = 3 ✕ n + 1 ✕ n = 4 ✕ n (d);

also ist überhaupt n ✕ r = r ✕ n.

k. Nach den decadischen Gesetzen unserer Zahlenschreibung wird daher eine ganze Zahl durch 10, 100, 1000 ꝛc. multiplizirt, wenn man ihr blos zur Rechten die Nullen des Multiplicators anhängt, z. B. 427 ✕ 10 = 4270; 427 ✕ 100 = 42700 ꝛc. denn nach diesen Gesetzen, verwandelt eine angehängte 0 diese 427 Einer in Zehner. Da nun 1 Zehner = 10 Einern; so sind 427 mal 1 Zehner = 427 mal 10 Einern, d. i. 4270 = 10 . 427 = 427 . 10. (53, i.). Ferner verwandeln zwo angehängte Nullen die 427 in Hunderte, und 100 = 100 Einern, so sind 427 Hunder-

ter = 427 mal 100 Einern, d. i. 42700 u. s. w. (Man vergleiche hiermit von der Multipl. aus L. d. R. pag. 27 bis 29.

Satz 54. Die Multiplication ist also ihrem Wesen nach, nichts weiter, als eine Addition, nur daß hier nicht mit eigenthümlichen, sondern nur mit in Verhältniß gesetzten Größen zu einander verfahren wird, die also in dieser Natur (nach S. 50 und 51) zu betrachten sind. Da aber (S. 50, a) Verhältnisse ihre Wahrheit nur aus ihrer Eigenthümlichkeit erhärten können, und also, so wie in ihrem Wesen, so auch in ihren Modificationen dem Wesen ihrer Eigenthümlichkeit conform seyn müssen; so sind daher weiter alle die allgemeinen Gesetze für die Addition, auch in dieser Gültigkeit für die Multiplication.

Daher:

a. In der Natur also, wie sich in der Addition Aggregat und Aggreganden verhalten, eben so auch hier in der Multiplication, daß nemlich sich in der Natur wie dort (S. 33 u. NB.) das Multiplicandum zu seinem Product verhalte, wie der Theil zum Ganzen, nemlich aber als ein verhältnißmäßiger Theil, nach der Anzeige des beystehenden Multiplicators; da hingegen Aggreganden eigenthümliche Theile vom Aggregat in solcher Vergleichung sind. Denn wenn $p = e \times f$, so enthält p die Größe e, aus deren

f maligen Vermehrung es entstanden, nothwendig als einen aliquoten Theil seiner so oft in sich, als f die Einheit (S. 53, b). Doch, nennt man das Product ein Ganzes, und die f malige Setzung seines es gegebenen Multiplicandum dessen verhältnißmäßigen Theil; so ist es nur in der Natur, wie solches von Aggregaten gilt, daß auch hier das eigentliche Ganze sich zum Product verhalte, wie die Einheit zu ihrem Zusammengesetzten. Denn so wie ein Ganzes aus einem Vielfachen (S. 17, b. e) entsteht, durch die m malige Setzung seiner Theile; so entsteht hier also das Product als ein Vielfaches aus Vielfachen durch malige Setzung eines seiner Factoren. Producte bezeichnen daher gleich Aggregaten complexe Größen.

Eben so drückt auch das Multiplicandum, so wie Aggreganden, an sich schon ein Ganzes, ein als Vielfaches an sich bestehendes, und hier nur als ein solches genommene, als ein Ganzes an sich schon betrachtetes, nach S. 19 in der Einheit gesetztes aus, daß nun so in seiner f maligen Setzung (nach 53, b) eine Menge giebt, deren Ausdruck oder Benennung das Produkt ist: also nur in Vergleichung genommen, heißt daher das Multiplicandum ein Theil seines Produkts.

b) Ist es (nach S. 33, Anm. 1) gleichgültig zur Summe, ob man setzet e ✝ f, od. f. ✝ e; so muß es auch gleichgültig für das Product seyn, ob man setzet e ✕ f od. f ✕ e (S. 53, b; 50, d).

c) Da (nach S. 33) ganze Zahlen zu ganzen Zahlen addirt, auch Ganze zur Summe geben, so geben also auch Ganze mit Ganzen multiplizirt dergleichen zum Product.

d) Nur gleichartige Größen lassen sich mit einander multipliciren. — Die Gründe für dieses Gesetz haben wir schon überhaupt von allen Verhältnißgrößen S. 50, g; 51 NB. 1 aufgestellt, zu welchen als besonderer nun noch für die Multiplication, nach Grund unseres Satzes, der oben S. 34 angeführte, kommt; daß, aus welchem Grunde sich nur gleichartige Größen addiren lassen, sich auch nur gleichartige mit einander multipliciren lassen. Denn der Ausdruck e ✕ f muß (nach S. 50) nothwendig zu seinem Product p eine reelle Größe geben, welche dem Verhältniß entsprechend ist, da ein Verhältniß an sich nichts in sich fassen kann, was wider dessen Eigenthümlichkeit wäre; welchergestalt also das Multiplicandum, solchergestalt muß das zu erzeugende Produkt seyn. Da nun aber weiter (nach a) Producte und Factoren beide als Aggregate und Aggreganden sich verhalten, und das Product wie eine Summe aus diesen anzusehen ist; so müssen nothwendig beide Factoren gleichartige Größen bezeichnen, wenn aus ihrer f maligen Vermehrung des einen durch den andern ein gleichartiges Wieviele p erzeugt werden soll. Denn aus ℍ, diese zum Multiplicandum angenommen, können einmal an sich schon keine Rthlr. kommen, denn hier läge in der Wirklich-

keit etwas, das in seiner Möglichkeit (für deren Ausdruck nach S. 50, e das Multiplicandum steht) nicht anzutreffen ist. Auch können ferner, wenn man Linien mit Flächen multipliciren wollte, zum Produkt p weder Linien noch Flächen kommen.

Satz 55. Nach dem Wesen der Multiplication S. 54 ergeben sich weiter, zu Folge S. 35, für solche, als Gesetze.

a) Keiner von den Factoren, er mag endlich, oder unendlich seyn, kann größer seyn als das Product.

b) Dagegen muß bey gleichartigen endlichen Größen das Product allemal größer seyn, als die eigenthümliche Summe beider Factoren zusammen; weil hier ein jeder, nach dem Begriff der Multiplication, als ein solcher vielfacher in der Einheit gesetzter Theil vom Product anzusehen ist, als der andere die Einheit in der Benennung seiner Vielfachheit ausdrückt, und das Produkt die Summe dieses f maligen Vielfachen begreift.

c) Gleich ist also das Product der f maligen Vielfachheit seines andern Factors e, u. umgek.

d) Wird daher ein Factor vermehrt; so wird auch um so viel mal das Product größer, als viele male dessen Einheit vermehrt worden. Eben so nothwendig der Fall, wenn beide Factoren vergrößert werden.

Satz 56. Endlich gelten, nach dem Wesen der Multiplication S. 54, noch für sie als allgemeine Gesetze nach S. 36 u. 37.

a. **Gleiches mit Gleichen multiplicirt giebt Gleiches, d. i. wenn** $a = b$ **und** $m = n$; **so ist auch** $a \cdot n = b \cdot n$.

Eben so kann also auch das Product ganzer Zahlen, kein anderes, als wiederum eine ganze Zahl seyn; und das Product aus einer, oder zwoen gebrochenen Zahlen, muß nothwendig auch einen Bruch geben.

b) **Ungleiches mit Gleichen, oder Gleiches mit Ungleichen multiplicirt, giebt Ungleiches; und das größte Product muß nothwendig (55, d) auf die Seite des größten Factors fallen; d. i. wenn**

$$\begin{array}{l} a \prec b \\ c = d \\ \hline ac \prec bd; \end{array} \qquad \left\| \qquad \begin{array}{l} a = m \\ p \prec q \\ \hline ap \prec mq. \end{array}$$

Betreffs der graden oder ungraden Zahlen (44, e) merken wir hier noch als Gesetze an.

α) **Eine grade oder ungrade Zahl durch eine grade multiplicirt, giebt eine grade.** Denn $2n \cdot 2m =$

$2 . 2nm$; und $(2n + 1) . 2m = 2n . 2m + 2m = 2 . 2nm + 2m = 2 (2nm + m)$.

β) Eine ungrade Zahl durch eine ungrade multiplicirt, giebt eine ungrade. Denn, $(2n + 1) \asymp (2m + 1) = (2n + 1) \asymp 2m + (2n + 1) \asymp 1$. Da nun $(2n + 1) \asymp 2m$ grade (α), und $(2n + 1) \asymp 1 = 2n + 1$ ungrade ist, so sind beide zusammen ungrade.

B. Wesen und allgemeine Gesetze der Dimension.

Satz 57. Wie nach S. 52 der Ausdruck $e \asymp f$, der determinirte Ausdruck für ein in Vermehrung gesetztes Verhältniß war; so giebt nun nach angef. O. $e : f$, den bestimmten Ausdruck eines in der Verminderung stehenden Verhältnisses; und zwar so wie $e \asymp f$ hieß, daß (50, e) hier e um so viele male vermehrt werden solle, als f durch seine Einheit anzeigte; eben so giebt der Ausdruck $e : f$ dagegen, nach S. 50, e, daß hier e, gemäß dem Verhalten von f, so viele male vermindert werden solle, als f, als ein in der Einheit gesetztes Vielfache, nach seiner ursprünglichen, und mit e gemeinschaftlich habenden Menge seiner Einheit es gestattet, d. i. im Gegensatz von der Multiplication

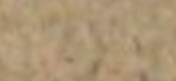
(52, a), es soll e durch f mögliche male vermindert werden; welches ist: die Einheit f, als den Inbegriff eines Vielfachen, mögliche male von der gleichartigen Einheit e wegnehmen; welches dann das verhältnißmäßige Vermindern einer Größe, die Dimension (Ausmessung) heißt.

Satz 58. Die Dimension ist also ihrem Wesen nach (50, e), die verhältnißmäßige Verminderung einer ideel zu einer andern reellen gesetzten Größe, welche man hier das Dimetiendum nennt, durch jene andere ihr als Maaß beygesetzte gleichartige reelle Größe, welche also der Dimensor ist, zur Erlangung einer dritten, den beiden in diesem Verhältniß gesetzten entsprechenden gleichartigen eigenthümlichen Größe y (50, f), welche die Mensur, das gefundene würkliche Maas dieses einen, in einem Verminderungsverhältniß durch die andere gesetzten Größe ist.

NB. Es wird also e durch f dimetiirt (gemessen,) wenn man f so ofte von ihm wegnimmt, als sich e in solche gleiche Vielfache, gleich den in der Einheit angenommenen Vielfachen f (nach S. 50, e) mögliche male zerlegen läßt, und die Größe, welche man für die Mensur y erhält, ist nun die Ernennung des eigenthümlichen

Wievielen von e, gemessen auf diese Weise durch das Maas f. — Durch Linien könnte man dieses also versinnlichen; wenn

e = 3, und



f = 1;

so ist also e : f = 3; oder wenn

e = 6 und

f = 2; so ist

also e : f = 3.

Diese gegebene Definition von der Dimension erhärtet sich aus dem Wesen verhältnißmäßiger Größen, und den daher (schon S. 50, e) gegebenen Begriff des dimetiiren, da (nach S. 50 u. 52) die Dimension nichts weiter ist, und seyn kann: als die bestimmte Modificirung eines Verhältnisses; und dimetiiren heißt also: verhältnißmäßig vermindern. Denn, der für diese Größenmodification eingeführte algebraische Ausdruck e : f, zeigt schon sogleich an, (so wie Satz 53 der Ausdruck e . f) daß die Größe, welche durch diesen angedeutet wird, nur in dieser Verbindung statt finde, da, wenn e : f = y, außer dieser, als eigenthümliche Größen gesetzt, e + f, od. e — f, wohl eine andere Größe z, nicht aber den Begriff eines Wievielen geben werden, das da = y wäre.

b) Gemäß dem Verfahrungsgesetz (NB.) für die Dimension giebt also (nach S. 53, b. c.) der Ausdruck e : 1 = e zur Mensur. Daher das arithmetische

Gesetz: daß die Zahl 1 weder multiplicire, noch dimetiire.

Umgekehrt dagegen, Dimetiendum und Dimensor als gleiche Größen angenommen, giebt der Ausdruck e : e = 1 zu seiner Mensur, da jede Größe sich selbst gleich, und sonach Einheit ihrer Art ist, und also e in e nothwendig nicht mehr mal, als in der Einheit in sich enthalten seyn kann.

Dimetiirt man dagegen eine größere durch eine kleinere Zahl, so muß die Mensur größer als 1 seyn, d. i. wenn r > n, so r : n > 1, denn r = r war schon r : r = 1, also muß, (nach S. 28, c) hier r : n > 1 seyn.

c) Will man daher das Dimetiiren auch ein Dividiren, eine Theilung der Größe e durch eine andere f nennen, so ist dieses nicht eine, das eigentliche Wesen der Sache ausdrückende, und adequate, sondern erst eine abgeleitete Benennung, von daher genommen, weil die Theilung einer Größe e durch eine andere f, wohl Aehnlichkeit mit der Dimension hat, indem die nemliche Modification hier angewendet werden muß, da man den aliquoten Theil einer Größe, als ein Dividendum angenommen, nicht anders erfinden kann, als wenn man sie nach Maasgabe der Theilungsgröße b, die man dann den Divisor zu nennen pflegt, bmal verringert, dann erhält man aber eine Größe, welche der Quotient heißen muß, nem-

lich das dieser Theilung entsprechende Wieviele, und es erscheint dann umgekehrt der Quotient, als eine in Verhältniß stehende Größe zu der theilenden, (den Divisor) nemlich im Verhältniß eines aliquoten oder aliquanten Theiles zu solchem aus dem Dividend; so wie dagegen beide, Dividend als Divisor hier beide als eigenthümlich gesetzte Größen genommen werden. — Daß es sich aber ganz umgekehrt bey der eigentlichen Dimension verhalte, ist uns nun schon aus S. 50. 51 und 52 klar; und daher kann nur wegen der Aehnlichkeit des Verfahrens, nicht aber eigentlich, das Dimetiiren ein Dividiren, ein Theilen der Größen genannt, und in dieser Rücksicht mit einerley algebraischem Ausdruck bezeichnet werden. Die eigentliche Dimension, und die Theilung verhalten sich sonach nur zu einander, wie das Allgemeine, und die besondere Anwendung, als welches letztere die Theilungs-Rechnung von der Dimension ist, und daher in der Arithmetic einen eigenen Artikel erfordert, und unter solchen eigentlich das begreift, was man zeither schnurrig genug die Gesellschaft-Rechnung mit allen ihren unterbegriffenen Arten l. d. R. S. 366—411 und 538—545 betittelt hat. — Dann, dividiren, theilen, heißt, ein Quantum a, den Dividend, in solche m malige Theile zerlegen, als ein anderes Quantum b, der Divisor, als ein in der Einheit gesetztes Vielfache anzeigt, und der gefundene Quotient v, verhält sich nun als ein gefundener aliquoter, oder aliqnanter Theil aus dem Dividend zu dem m fachen des Divisors.

Daher aber, daß man bis jetzt noch in keinem mathematischen Buche auf diesen wesentlichen Unterschied zwischen Dimetiiren, verhältnißmäßig vermindern, und Dividiren, oder theilen, Rücksicht genommen, hat man nicht nur die Division selbst ganz falsch erklärt, oder ihrer Theorie schwankende Begriffe untergeschoben, sondern es haben sich daher auch Fehler in die gesammte Verhältnißtheorie eingeschlichen, welche wohl einigen Mathematikern nicht unbemerkt geblieben sind, aber ohne daß ihre Versuche, solche zu verbessern, solchen wahrhaft abzuhelfen, sonderlich geglückt wären.

d) Dimetiendum und Dividendum; Dimensor und Divisor; Mensur und Quotienten sind sonach wesentlich verschiedene Ausdrücke, wie es Dimension und Division sind. Mit welchem Grunde man aber bisher alle diese Begriffe so in ein Chaos unter einander gemengt, und zum Theil ihre Benennungen noch gar nicht gefunden hat, überlasse ich einem gewissen sehr gelehrten Professor zu entscheiden, der eine jede philosophische Untersuchung mathematischer Lehren, grade zu auf sein Professor-Wort für Unsinn erklärte.

Satz 59. Wie so ihrem Begriff und Wesen nach die Dimension nichts weiter, als eine blos verhältnißmäßige Verringerung, und also die der Multiplication (54) entgegengesetzte Grössen-Modification ist; so ist sie daher im Grunde auch nichts weiter als eine m malige Sub-

traction: und es gelten daher, nach Grund S. 54, auch für sie in Anwendung alle die von dieser Größen-Modification S. 39 bis 43 aufgestellten allgemeinen Gesetze.

So wie die Multiplication zu ihrem Produkt (54, a) ein aus einer vielfachen Vermehrung (nach Anzeige des Multiplicators) eines andern Vielfachen (des Multiplicandum) ein neues m mal vermehrte Vielfache giebt; so giebt dagegen die Demension in ihrer gefundenen Mensur ein aus einem Vielfachen (den Dimetiend), nach Anzeige eines andern in der Einheit gesetzten Vielfachen (des Dimensors) entstandenes m maliges verminderte eigenthümliche Wieviele, und es sind daher Multiplication und Dimension sich direct entgegengesetzte Größen-Modification.

b) In der Natur daher, wie (nach S. 54) die Multiplication ihrem Wesen nach nichts weiter als eine Addition war, in eben der Natur ist sonach auch die Dimension, als die der Multiplication entgegengesetzte Rechnungsart, nichts anders als ein verhältnißmäßiges Subtrahiren des mögliche male genommenen Maaßes (Dimensors) von dem Dimetiendum; und in dieser ihrem Begriff und Wesen entsprechenden besondern Anwendung, gelten denn sonach auch von der Dimension alle jene S. 39 bis 43 aufgestellte allgemeine Gesetze für die Verminderung eines Wievielen.

c) Wenn also in der Subtraction Minuend und Diminutor (S. 39, b), der Ausdruck e — f im Gegensatz von e ⊣ f zu betrachten waren, als ein aus den gleichartigen Theilen e, f bestehendes Ganze, wovon der Minuend, als der eine Theil, um so viel vermindert werden soll, als wie der andere (der Diminutor) die Einheit enthält; so stehen hier in der Dimension, in dem Ausdruck e : f, im Gegensatz von e ⋋ f, auch e und f als gleichartige Theile einer Größe, die aber im Gegensatz von e ⋋ f, nicht m mal zusammengesetzt, sondern wovon der eine, (der Dimetiend e,) mögliche male (nach S. 58, NB.) so oft durch den andern (den Dimensor f) vermindert werden soll, als sich der andere e, als ein Vielfaches, in solche gleiche Vielfache, gleich den in der Einheit stehenden Vielfachen f mögliche male zerlegen läßt. Man nimmt also auch hier, (wie in der Subtraction 39, c) von einem angenommenen Ganzen, eine andere Größe, die man in dieser Vergleichung als einen, einige, oder alle Theile seiner betrachtet, weg, es geschieht aber hier dieses Wegnehmen, nach dem Begriff der Dimension, nicht wie in der Subtraction nur einmal, sondern so viel mögliche male, als sich das Dimetiendum in solche gleich vielfache Theile zerlegen läßt, als der Dimensor, als ein in der Einheit gesetztes Vielfache ausdrückt. Die Benennung nun, wie viele male diese Zerlegung geschehen sey, giebt die Mensur, die Bestimmtheit des Wievielen von e, gemessen durch das für sein Maas angenommene f.

Wie nun in der Multiplication das Multiplicandum sich zu seinem Product verhielt, wie der Theil zum Ganzen; so verhält sich hier wenn e : f = y, der Dimensor f zu seinem Dimetiendum e als ein so viel maliger Theil, wie y benennt. f als Maas von e gebraucht, muß also, wenn sich e in y mal f Theile zerlegen läßt, y mal gesetzt, der Größe f gleich seyn: — und wenn also f sich als y mal in e enthalten ergiebt; so ist also jedes Dimetiendum gleich einem Product, das aus so oftmaliger Setzung seines Dimensors entstanden ist, als die Mensur durch ihre Einheit anzeiget. — Daher, so wie die Multiplication lehrte, durch m malige Setzung eines Vielfachen, nach Maasgabe eines andern Vielfachen, zu ihrem Product ein neues Vielfache aus einem Vielfachen zu erzeugen; lehrt dagegen die Dimension, von einer so entstandenen Größe, als wie nun hier das Dimetiendum, die Mensur erfinden, wie oft eine gewisse Größe (der Dimensor) als ein Vielfaches gesetzt werden müsse, um ein dergleichen Vielfaches aus einem Vielfachen zu erzeugen.

Jedes Dimetiendum ist sich also vorzustellen, als ein Product, dessen Factoren, der mit der Mensur multiplicirte Dimensor; und Dimetienden bezeichnen daher, wie Producte, komplexe Größen. (Man vergl. S. 56)

Es ergiebt sich sonach α) jedes Product durch seinem Multiplicator dimetiirt, muß das Multiplicandum zur Mensur geben. Ferner

β) Eine Größe durch eine und dieselbe Zahl multiplicirt, und wiederum dimetiirt, muß ungeändert bleiben; eben so auch, wenn man sie erst dimetiirt, und durch den nemlichen Dimensor wiederum multiplicirt. Daher

γ) Das Verfahren, eine komplexe Größe durch eine ganze Zahl zu messen ist; wenn man jeden ihrer Theile besonders mißt, und die erhaltenen Mensuren addirt, d. i. $(a + b) : n = a : n + b . n$; Denn $(a : n + b : n) \times n = a : n \times n + b : n \times n = a + b$. Vergleiche S. 53, d.

Nicht aber kann man hier auch sagen, wie in der Multiplication S. 53, f, daß die nemliche Mensur erhalten würde, wenn man dagegen setzte $6 : (3 + 2) = 6 : 5$. Denn gaben die Ausdrücke $6 . (3 + 2)$ und $6 . 5$ einerley Product; so kam dies eigentlich aus einer Verwechselung der Factoren, daß man setzte $(3 + 2) . 6$; in dieser Ordnung angegeben, bedeuten auch $(3 + 2) : 6$, und $5 : 6$ gleichgültige Größen. Nicht aber kann dies der umgekehrte Fall seyn, da sich Dimetiendum und Dimensor nicht verwechseln lassen, und hier nur der Dimensor als ein verhältnißmäßiges, malige Vielfache in der Einheit, nicht aber als ein in eigenthümlichen Theilen gesetztes Vielfache stehen kann. Soll daher mit $(m + n)$ als einer Summe dimetiirt werden; so kann dieses auch nur mit ihr als Summe, (als einen maligen Vielfachen aus der

Einheit) nicht aber mit ihren eigenthümlich gesetzten Theilen geschehen.

Wird aber dagegen verlangt, daß eine Größe m malig, + n malig, + x malig u. s. dimetiirt werden soll; so sehen wir, daß hier lauter verhältnißmäßige Größen, malig Vielfache in der Einheit zum Dimensor gegeben sind, und hier eine fortgesetzte m+n+x malige Dimension der Größe a verlangt wird, und daß also, entsprechend S. 53, h, die endliche Mensur gleich seyn muß, ob man mit m, n, x einzeln, oder sogleich, wie es in der Praxis bequemer, mit dem Producte aller Dimensoren mnx verfährt. 1024 : 2 . 3 . 4 = 1024 : 24. Denn der Ausdruck, a durch m, n, x dimetiiren, heißt: a hier m malig, + n malig, + x malig, also = mnx malig dimetiiren, und es muß also heißen a : m . n . x, nicht aber etwa a : m + n + x. Denn 1024 : 2 . 3 . 4 = 1024 : 24; da dagegen 1024 : 2 + 3 + 4 = 1024 : 9, und, wie wir eben anwiesen, nicht anders möglich ist. Eben so

δ) Wird die Differenz zwoer Größen durch eine ganze Zahl dimetiirt, wenn man jede besonders durch sie dimetiirt, und die Mensuren subtrahirt; d. i. (a — b) : n = a : n — b : n; denn, (a : n — b : n) ✕ n = a : n ✕ n — b : n ✕ n = a — b. Vergl. S. 53, e.

Doch wenn man das Dimetiendum und die y mög-lich malige Setzung seines Dimensors als gleichartige Theile eines Ganzen betrachtet; so geschiehet dieses nur in der Vergleichung, in welcher solche von Minuend und Subtrahend (S. 39, g) statt findet. Denn auch hier drücken schon beide an sich Ganze, und zwar nothwendig (nach S. 50) als in der Vielfachheit be-stehende Ganze aus, die nur hier als solche genommen (zu Folge S. 19) in der Einheit gesetzt sind, die nun so in ihrer m maligen Verminderung, der Zerlegung des einen in lauter gleiche solche Größen, wie das an-dere ausdrückt, eine neue würkliche Größe zu ihrer Mensur geben, welche (nach S. 50) nun das eigen-thümliche Verhalten des Dimetienden, gemessen durch seinen Dimensor, ausdrückt, wie viel mal es sich nem-lich in solchen zerlegen, oder dieses sich von ihm weg-nehmen lasse. Also nur in Vergleichung heißt daher der Dimensor ein y maliger Theil seines Dime-tiendum.

d) Nach dem Wesen eines Verhältnisses über-haupt, drückt also zu Folge S. 50 u. 51, auch in Dimensionsverhältnissen zwoer Größen, so wie bey Vermehrungsverhältnissen das Multiplicandum, gleichfalls auch hier das Dimetiendum keine eigen-thümliche Größe aus, sondern nur eine ideell gesetzte, deren Würklichkeit erst durch die Ausmessung mit der ihr beygesetzten würklichen gefunden werden soll, wenn man nemlich ihre, außer diesem Verhältniß gesetzte

eigenthümliche Größe, durch möglich maliges Vergleichen mit der ihr beygesetzten andern reellen bestimmt; und die so gefundene Mensur drückt also nun erst die Eigenthümlichkeit des Dimetiendum aus, die solches in dieser Vergleichung mit seinem Dimensor hat und haben soll.

e) Wenn es nun aber bey Multiplication-Verhältnissen (nach S. 54, b) gleichgültig, ob man setzte e ⋌ f, od. f ⋌ e; so verhält es sich dagegen hier in der Dimension wiederum wie dort bey der Subtr. (S. 39, f), daß, so wie dort Minuend und Subtrahend nicht verwechselt werden können; eben so auch hier das Dimetiendum nicht mit dem Dimensor zu verwechseln sey, sondern letzterer immer dem Dimetiendum mit dem ihn characterisirenden Zeichen nachgesetzt seyn müsse, e : f u. f : e sind also hier keinesweges gleichgültige Ausdrücke; denn verschiedene Größen durch verschiedene Maaße gemessen, müssen nothwendig auch eine verschiedene Mensur erhalten.

f) Wie nun nach Erweisung dieses S. a u. c, die Multiplication und Dimension grade einander entgegengesetzt sind; so sind sie daher auch einander, (nach c dieses S.) zur Probe, d. i. wenn e : f ⊨ y; so ist y ⋌ f = e, wie dort erwiesen worden. (Man vergl. S. 56 und 39, h.) Denn, die Größe um so viele male, nach Anzeige der Mensur, mit demselben Maaße (Dimensor) wiederum zusammengesetzt, als

man sie durch solches malig, nach Anzeige der Einheit der Mensur, zerlegte, oder verringerte, muß nothwendig dieselbe Größe wiederum herstellen, weil sonst die Größe nicht mehr sich selbst gleich wäre. (S. 27.) Diese wesentliche Eigenschaft, welche also nach der Natur aller Größe, auch der im Dimensionsverhältniß stehenden eigen seyn muß, hat hier wiederum, wie dies der Fall bey der Subtr. war, einige Mathematiker zu der falschen Definition der Dimension verleitet, daß sie solche also bestimmen; e : f sey, ein Quantum y erfinden, welches y ✕ f = e sey. — Welcher Fehler nun noch dadurch obendrein vermehrt worden ist, daß sie durchgehends von Division reden, wo sie nach S. 58 doch eine Dimension hätten finden sollen; und was noch das lustigste ist, so will diese Definition weder das Wesen der Dimension, noch der Division, sondern nur erst eine wesentliche Eigenschaft, sowohl der einen, als der andern ausdrücken.

Anm. Eine kleinere ganze Zahl u mißt sonach eine größere n, wenn man (zu Folge S. 53) u so viele male zu sich selbst setzt, bis daß mu = n, und denn die Menge dieses möglich maligen Setzen zu sich selbst benennt, welche Benennung die Mensur giebt. Z. B. 9 : 3 giebt 3 + 3 + 3 also = 3 mal für die Mensur.

NB. Nicht aber kann man hier wie bey der Subtr. (S. 39, h, NB.) schließen; daß Ganze durch Ganze gemessen, auch Ganze zu ihrer Mensur haben müß-

ten; wie wir solches schon vorher gezeiget, und gleich im folgenden Satz noch deutlicher erläutern werden.

g) Da nun so, (aus f dieses S.) gemessene Grösßen zu ihrer Mensur nothwendig eine Größe y geben müssen, daß wenn e : f = y, nothwendig y × f = e sey; so folget hier wiederum aus den schon (S. 50. 51 und 54, d) angeführten allgemeinen Gründen, als besonderer: daß nicht nur die Mensur mit dem Dimetiend, sondern auch mit dem Dimensor, und sonach folglich auch dieser mit dem Dimetiendum gleichartig seyn müsse. Wozu noch das allgemeine Gesetz für jede Grösßen Dimension S. 24 hinzukommt. Unsinn ist es, wenn man Rt. durch Hb; Flächen durch Linien ꝛc. dimetiiren will, die Mensur könnte da wohl eher eine Beutelmütze, als eine von diesen beiden benannten Grösßen seyn. (Man vergl. S. 39, i)

h) Weiter fließt aus f dieses S., daß wenn e : f = y, dieses als die Mensur nicht nur ausdrückt, wie oft mal das gebrauchte Maas f in e enthalten sey, sondern, daß es auch zugleich angiebt, um wie viele male eine von diesen beiden im Dimensions-Verhältniß stehenden Grösßen, grösßer oder kleiner als die andere sey; da nach S. 28, c, nur das Kleinere in dem Grösßern enthalten seyn kann; und (nach S. 29 u. 30) eine Größe um so viele male grösßer ist, als sie die andere als einen Theil ihrer in sich enthält. Wie nun (nach S. 51) überhaupt, Verhältnisse eine Messung

der in ihnen gesetzten Größen, der einen durch die andern ausdrücken, diese aber freylich (nach S. 50) nur durch malige Vermehrung oder Verminderung, oder dem eigentlichen Dimetiiren geschehen kann; so zeigt der allgemeine Ausdruck e ⁘ f, wenn er nicht ausdrücklich e ⁙ f bestimmt gegeben ist, jedesmal an, daß e : f verlangt wird. Welches aber bis jetzt die Mathematiker zu dem doppelten Fehler verleitet hat, daß erstlich, weil sie hier nicht unterschieden, daß der allgemeine Ausdruck nur dem besondern subponirt sey, sie Verhältnisse definirten: als die Vergleichung zweer Zahlen rücksichts ihrer durch die Division zu findenden Größe der einen gegen die andere, dividirt nemlich die eine durch die andere. Wo sie also das Wesen der Verhältnisse nur einseitig bestimmten, und auch fehlerhaft sie durch die bey Verhältnissen doch ganz unstatthafte Division bestimmen wollten. Zweitens, verführt sie dieses von Leibnitz an, wider die Natur der Sache (50, h), Verhältnisse und Division, richtiger Dimension — mit einerley Zeichen zu bemerken.

Satz 60. Der für die Dimension eingeführte algebraische Ausdruck e : f, macht es in der arithmetischen Form nicht nothwendig, daß der Dimensor just kleiner, als das Dimetiendum seyn müsse, denn f kann hier auch größer seyn, als e. (Man vergleiche 39, e).

NB. Weitere Fortsetzung vom Begriff und Natur der Brüche, zu S. 12, d; 13, c; 24, c; 33, NB.

Der Ausdruck e : f schließt, wie in der Subtr. S. 40, gleich dem e — f, dreyerley Fälle in sich; es kann nemlich e u. f gleiche Größen bedeuten; oder f kann kleiner als e seyn; welcher beiden Fälle Resultat schon oben (S. 58 u. 59, f, Anm.) aus den dort, für diese beide Fälle aufgestellten Gesetzen bestimmt ist; Noch kann aber auch in dem Ausdruck e : f (so wie in e — f) würklich f als der Dimensor größer seyn, als e das Dimetiendum. Ist dieses, so sehen wir, daß, da Dimitiiren weiter nichts ist, als mögliche male Subtrahiren (S. 59, c), und (nach S. 28, c) nur das Kleinere in dem Größern enthalten seyn, und also auch nur jenes von diesem (S. 40) weggenommen werden kann, also auch daher nothwendig kein Dimensor größer als sein Dimetiendum seyn kann; es mit diesem Fall also nothwendig die gleiche Beschaffenheit wie dort mit e — f, wenn e $\prec$ f (S. 40) haben müsse. Es ist hier im Grunde eine Verwechslung der zu vergleichenden Größen, daß man nemlich das Dimetiendum hier nicht in mögliche Stücke nach dem Ausdruck der unter der Einheit des Dimensors begriffenen Vielfachheit zerlege, als welches hier ohnmöglich; sondern daß man nun den Dimensor selbst, als die aus so vielen gleichen Theilen bestehende Einheit anzusehen habe, als seine Benennung die Vielfachheit

in ihm enthalten angiebt, und nun das Dimetiendum, als ein mit ihm verglichenes, und in dieser Vergleichung als ein solches gleichartiges Stück seiner betrachtet, das dergleichen seiner würklichen Theile so viele würklich fasset, als dessen Ausdruck an sich, außer dieser Vergleichung die Einheit enthält. Es ist also in dem Ausdruck $e : f$, ($e \prec f$ angenommen) die Mensur keine ganze Einheit f, sondern nur ein Stück von einer solchen Einheit f, und zwar ein solches Stück $= e$, und es giebt, wenn $e \prec f$, daher $e : f = \frac{e}{f}$ zu seiner Mensur, nach S. 12, d; 13, c, 33, NB., wo denn nun $\frac{e}{f}$ in dieser Vergleichung, nach angef. O. ein Bruch, als ein Weniger als ein Ganzes, heißt, aber weil $\frac{e}{f}$ eigentlich die Mensur von $e : f$ ($e \prec f$) ist; so bezeichnet (nach S. 58, c) $\frac{e}{f}$ nun nicht mehr eine im Verhältniß gesezte, sondern eine eigenthümliche Größe; und es heißt also jeder Bruch $\frac{r}{n}$ soviel, als, der nte Theil von 1, r mal genommen, oder $1 : n \asymp r$ (S. 59, f); daher denn auch nach angef. O. und dem Wesen des Bruches, jeder Bruch, durch seinen Nenner multiplicirt, den Zähler zum Product geben muß, d. h. $\frac{r}{n} \asymp n = rn : n = r$.

b) Wurde S. 59, f, NB. angemerkt, daß man in der Dimension nicht nothwendig schließen könne:

daß Ganze, durch Ganze gemessen, auch nothwendig dergleichen zur Mensur geben. Dieses Gesetz beschränkt sich hier nur: daß wenn e ≷ f, nothwendig (nach S. 28, c; und 58) f wenigstens einmal als ein ganzer Theil, nach dem Inbegriff seiner Vielfachheit in der Einheit gesetzt, in dem größern e enthalten seyn müsse. Ist nun aber als ein in der Einheit gesetztes Vielfache e = a + a + a + a + a, und eben so dagegen nur f = a + a + a, so sehen wir, daß e und f, als Ganze und Theile gegen einander betrachtet, als aliquote und aliquante sich gegen einander verhalten, und f also nie ein genaues Maas von e seyn kann (S. 15. u. 16), und daher immer von e ein Rest verbleiben wird, welcher noch durch f zu messen; da er aber, (nach S. 24, b) nothwendig selbst kleiner als f (der Dimensor); so tritt hier wiederum der Fall (unter a) ein, daß, wenn so an sich e : f im Verhältniß Irrationeller Größen sind, (nach S. 24, c) die Mensur von e : f ein Bruch, und zwar in diesem Fall ein uneigentlicher Bruch seyn müsse, nemlich, der f wohl ein, oder einige mal, aber immer noch in einem etwas fehlenden an der nächsten Einheit als Mensur von e bestimme. Man vergleiche hierbey noch S. 33, NB.; 40 u. 59, c.

NB. Jeder Bruch drückt so etwas negatives von der Einheit aus, S. 13, c. Es giebt hier die nothwendige Denkform, daß, in je mehrere gleiche Theile man ein Ganzes zerlegt, daß diese auch an sich selbst

um desto kleiner seyn müssen. In einer je größern Zahl daher der Nenner eines Bruches ausgedrückt ist, um desto kleiner ist sein positiver Werth, und dagegen um desto größer das negative seines Ausdrucks. Also sind Brüche von gleicher Benennung gleich, die einerley Zähler haben, und bey verschiedenen Zählern ungleich; und zwar ist dann der größere, der den größern Zähler hat; denn er zeigt an, daß hier von den gleichen zerlegten Einheiten des Ganzen, ein solcher Theil mehrere male, als in dem andern genommen sey.

c) So faßt demnach die Demension den besondern Ursprung der Brüche in sich, aber auch im allgemeinen, so wie die Subtraction (S. 40) den entgegengesetzter Größen Denn so wie dort der Diminutor, als etwas dem Minuend entgegengesetztes angesehen werden mußte, eben so hier der Dimensor von dem Dimetiend. Wird nun beim Bruch eigentlich (nach a dieses S.) das Dimetiendum der Dimensor u. umgek.; so zeigt hier denn nun auch in dem Ausdruck $\frac{e}{f}$, der Zähler e, als eigentlich zu nehmender Dimensor von der Einheit f, eine Dimension des e : f eigentlich an, dessen Mensur der Ausdruck $\frac{e}{f}$ selbst ist; und $\frac{e}{f}$ als ein negativer Ausdruck für die Einheit, zeigt hier ein maliges negative von der Einheit f an.

d) Aus dem Wesen und Ursprung eines Bruches ergiebt sich also: daß in dem Ausdruck $\frac{e}{f}$ der Zähler

e die eigentliche Größe sey, und f der Nenner, nichts weiter als nur die Benennung von e, welcher Art e sey, enthalte.

e) So unrichtig aber, (wie S. 40 gezeigt worden,) es ist, wenn man Subtraction und entgegengesetzte Größen für eines hält, und so vermengt vortragen will; eben so unrichtig ist es, Brüche und Verhältnisse für eines zu halten. Denn ob sie gleich aus der Dimension ihren Ursprung (nach a, b u. c dieses S.) leiten; so sind sie doch ganz anderes Wesens, als diese. Es ist der Bruch daher an sich auch keine Dimension, weil diese ihrem Wesen nach, weiter nichts als der bestimmte Ausdruck eines Verhältnisses. Kein Bruch aber ist an sich ein Verhältniß selbst, sondern wie aus a und b dieses S. erhellet, schon der Ausdruck eines modifizirten Verhältnisses, schon selbst die gefundene Mensur zwoer im Dimensions-Verhältniß gesetzter Größen. Er bezeichnet also nicht wie Verhältnisse überhaupt, oder Dimensionen insbesondere, den Ausdruck eines ideellen Wievielen, sondern eine eigenthümliche Größe, die aber gegen sich selbst wie der in einer neuen Vergleichung als der Theil zu seinem Ganzen (60, a, c) stehet. In dieser doppelten bey ihm zu nehmenden Rücksicht also, im ersten Fall Aehnlichkeit mit einer Mensur (59, c, d, h); im zweeten mit einem Quotienten (58, c), und also sein eigenes Wesen hat. Denn nach seiner Entstehung (60, a, c) zeigt der Ausdruck $e : f = \frac{e}{f}$ die Mensur von e : f, und

also (nach S. 59, c, d, h) eine reelle Größe an. Es liegt aber zugleich in dem Wesen dieses Ausdrucks wiederum (nach 60, b) eine neue Vergleichung, in welcher dieser gefundene Größen-Ausdruck $\frac{e}{f}$ gegen sich selbst, als Theil zu seinem Ganzen steht, von dem er selbst wiederum, aber als ein reelles gemessen werden soll, so wie er der Ausdruck des Maaßes von e : f ist; und sonach erscheint er an sich wiederum in der Natur einer Division (S. 58, c) des Zählers durch den Nenner, und drückt an sich gleich einem Quotienten selbst wiederum etwas ideelles aus, nemlich des Theiles zu der ihn zu theilenden, als seinem Ganzen, d. i. zu seinem Nenner (d). Doch bezeichnen deswegen Quotienten und Brüche, eben so wenig wie Verhältnisse und Quotienten, keinesweges gleichgültige Ausdrücke, sondern es findet unter ihnen nur eine Aehnlichkeit des Wesens statt. Denn, verhält sich der Quotient als ein m malig gefundener Theil aus dem Dividend zu dem m fachen des Divisors; so steht dieser nur zu seinem Nenner (als seinem ihn aus sich selbst, den Zähler, gegeben habenden Divisor) in der Vergleichung eines so vielen Theiles von dem Ganzen, als seine reelle Einheit anzeigt. L. d. R. S. 56 u. 57. So wie man nun aber wegen der Aehnlichkeit der Wesen (58, c) Dimensionen und Divisionen durch einerley algebraischen Ausdruck zu bezeichnen pflegt, eben so hat man aus gleichem Grunde auch die Brüche mit dazu aufgenommen. Nicht muß man aber wegen die-

ser gleichen Bezeichnung deswegen auch selbst Dimensionen, Divisionen und Brüche für gleiches Wesens halten wollen.

f) Der Bruch ist also seinem Wesen nach weiter nichts, als: ein würkliches Wieviele gegen ein anderes gleichartiges in eine solche Vergleichung gesetzt, so daß man letzteres (den Nenner) als die hypothetische Einheit annimmt, und ersteres (den Zähler) nur als einen aliquoten, oder aliquanten Theil solches in dieser Vergleichung ansiehet. S. 12, d; 13, c; 24, c; 33, NB.— Es ergiebt sich daher die Definition des Bruches, daß er sey „Die Benennung von nur einem, oder einigen Theilen eines in der Einheit ausgedrückten Vielfachen.

g) Mit Brüchen läßt sich daher, weil sie eigenthümliche Größen ausdrücken, auch nach allen Größen-Modificationen, wie mit solchen verfahren; ja sie sind selbst der allgemeine Ausdruck für jedes Wieviele.

Der erste Theil dieses S. ist aus dem bisher schon verhandelten für sich klar; und was dessen zweeten Theil betrift; so erweiset sich solcher aus der Natur des Bruches, und dem Wesen des Begriffes der Einheit und ganzer Zahlen (S. 6. u. 17). Denn, da kein Denkbares möglich ist, das nicht Eins wäre (12, b), und daher auch der Bruch an sich nothwendig Einheit ausdrücken, und nur in Vergleichung ge-

setzt, eine Größe von der andern als ein Bruch erscheinen kann (S. 12, d; 13, c), also jede Größe an sich Eins seyn muß (12, a, b), und also jede Zahl, als die Benennung der Einheit (12, c), gleich der Sache für die sie steht, Einheit an sich ausdrücken muß, die Mathematic aber nur (S. 6) hypothetische Einheit zu ihrem Gegenstande haben kann, welche also nach dem Wesen ihrer Entstehung jedesmal (S. 17, a) der Inbegriff eines Vielfachen ist, dessen Inbegriff das Ganze, und zu seiner Benennung die ganze Zahl giebt; so ist also jede ganze Zahl n, nach ihrem Wesen und Entstehen (S. 17, f), weiter nichts als die n malige Benennung der in ihr als einem Vielfachen begriffenen Einheit. Ist nun in jedem Bruch (nach d dieses S.) der Zähler die eigentliche Größe, und der Nenner weiter nichts, als die Benennung, von welcher Art diese Größe sey; so ist denn daher, in wiefern jede ganze Zahl nichts weiter, als die wirklich benannte Angabe von der in Sache enthaltenen hypothetischen Einheit, der Bruch, der allgemeine Ausdruck für jedes Wieviele, d. h. der Bruch ist der allgemeine Ausdruck aller Größen-Benennung. So wie an sich jede Zahl n ein Ganzes ausdrücken muß = n mal 1 (S. 17, f); so ist daher jede ganze Zahl $n = \frac{n}{1}$ d. i. jede ganze Zahl ist gleich dem Zähler eines Bruches, der zu seinem Nenner 1 hat. Ist sonach jede ganze Zahl $n = n \cdot 1$; so ist sie (59, c) auch gleich einem Dimetiendum, das zu seinem Dimensor 1 hat. Giebt nun

aber (S. 58) $e : 1 = e$, also $n : 1 = n$ zu seiner Mensur, und drückt (60, d) jeder Bruch, ein schon modificirtes Dimensions-Verhältniß aus; so ist also, wenn $n : 1 = n$, auch n selbst $= \frac{n}{1}$.

h) Aus g dieses S. leiten sich denn nun die Gründe für folgende Modificationen mit Brüchen ab.

α) Jede ganze Zahl n läßt sich also in einen Bruch, dessen Nenner m, verwandeln, wenn man setzt $n = \frac{n \cdot m}{m}$. Denn wenn (nach g dieses S.)

jede ganze Zahl $n = \frac{n}{1} = n : 1 = n$ und $n \times 1 = n$;

so muß, wenn der Nenner ein Vielfaches ausdrücken soll, nothwendig die ganze den Zähler gebende Zahl, so viele mal zu sich selbst gesetzt werden, als in dem ein Vielfaches anzeigenden Nenner die Einheit: ist nun m als ein Vielfaches $= 1 + 1 + 1$; so muß also werden $n = \frac{n}{1m}$ mal $+ \frac{n}{1m}$ mal $+ \frac{n}{1m}$ mal, d. i.

da $1 + 1 + 1 = m$ heißt; so muß also seyn $n = \frac{n}{m} +$

$\frac{n}{m} + \frac{n}{m}$ d. i. $n = \frac{n \cdot m}{m}$. Denn der Ausdruck $\frac{n \cdot m}{m}$ nun als ein Bruch nach der Natur von seiner Entstehung (S. 60) genommen, daß er gleich $n \cdot m : m$; so giebt wiederum der Ausdruck $n \cdot m : m = n$ zu seiner Mensur, und die eigentliche Beschaffenheit der Größe n,

wurde also durch diese Modification nicht verändert. (S. 59, c)

β) Eben so ist nach dieser Demonstration jede gemischte Zahl $r\frac{n}{m} = \frac{r \cdot m + n}{m}$. Denn hier wird verlangt, daß nicht nur soll seyn $r = r \cdot m : m$; sondern es soll seyn $r = r + \frac{n}{m}$ also $r \cdot m + n : m = r + \frac{n}{m}$.

γ) Man kann so daher selbst jeden Bruch $\frac{r}{n}$ in einen andern ihm gleichen von einem andern Nenner m verwandeln, wenn man setzt $\frac{r \cdot m : n}{m}$; da nemlich (nach d dieses S.) im Brüche nur der Zähler die eigentliche Größe ist; so ist also hier erstlich r (nach c unter h dieses S.) in einem Bruch, dessen Nenner m, zu verwandeln, giebt also $= \frac{r \cdot m}{m}$: nun ist aber r nicht als eine ganze Einheit, sondern nur $= \frac{r}{n}$ angenommen, also als ein negatives an der Einheit (NB. dieses S. u. nach a dieses S.) als der nte Theil nur von 1, rmal genommen; daher muß die Auflösung stehen $\frac{r \cdot m : n}{m}$, daß man nemlich nun mit n, den Nenner von $\frac{r}{n}$, durch die Dimension, als mit einem Dimensor die Mensur sucht, wie vielster Theil der nte Theil von 1, rmal genommen, sey, wenn man

ihn stellt, daß er gleich seyn soll einem mten Theil von 1 (nach a dieses S.) wie viel mal er alsdann genommen werden müsse, um damit er, obgleich unter anderer Benennung, doch die nemliche vorige Größe sey, und so findet man $= \frac{r \cdot m : n}{m}$.

δ) Als ein allgemeines Verfahren daher aus gleichem Grunde das nemliche „um mehrere Brüche unter eine allgemeine Benennung zu bringen“ nachdem man nemlich vorher solche gefunden; und diese muß man in dem Product aller Nenner finden. Denn, so wie (nach S. 54, a) das Product ein Ganzes aus allen seinen Factoren, und der m maligen Setzung dieser gleich ist; so muß also, wenn man z. B. die Brüche $\frac{r}{n}, \frac{t}{x}, \frac{v}{y}$ hat, das Product nxy gleich seyn diesen seinen es gegeben habenden Factoren, und jeder einzelne Bruch muß also selbst ein Theil von diesem allgemeinen Product seyn. Ein wievielster Theil er nun aber von solchem sey, findet man nun, wenn man jeden einzelnen auf einen andern Bruch bringt, dessen Nenner dieses allemeine Product selbst ist, und nun so (nach γ) verfährt, wo sich denn finden muß, daß von den Brüchen $\frac{r}{n}, \frac{t}{x}, \frac{v}{y}$ sey $\frac{r}{n} = \frac{r \cdot nxy : n}{nxy}$, u. s. w. mit $\frac{t}{x}$ und $\frac{v}{y}$ u. s.

i) Weiter ergeben sich aus dem Wesen der Brüche, und besonders aus d dieses S., die Gründe des Verfahrens ihrer Modificationen, daß man nemlich bey solchen vorzüglichst sein Augenmerk auf den Zähler, als die eigentliche Zahl zu richten habe.

α) Es können also nur gleichnamigte Brüche, (nach den Grundgesetzen S. 32, 34, 40, 50 g) zu einander addirt, oder von einander subtrahirt werden; und zwar, ist hier alsdann nur der Zähler als ein Aggregand, oder Aggregat, oder als ein Minuend, oder Subtractor zu betrachten.

Eben so ist es bey der Multiplication und Dimension.

β) In der Multiplication sind also (nach S. 56, a). wenn einer der beiden Factoren als ein Bruch von der Einheit des andern ausgedrückt ist, das Product ebenfalls nur wiederum ein Bruch von eben der Benennung des es gebenden Factors. Es wird hier würklich der Bruch um so viel mal im Product grösser, weil dessen Zähler es um so viele male wurde, als die Einheit in der ganzen Zahl, dem andern Factor enthalten war, und dagegen der Nenner des Bruches doch ungeändert blieb, und also nach Grund b, NB. dieses S. verfahren wurde. Sieht man dagegen auf die ganze Zahl, und betrachtet solche als das Multiplicandum, so muß nothwendig, diese mit einem Bruch multiplizirt, das Product von $n \cdot \frac{f}{m} \prec n$, weil $\frac{f}{m}$

$\prec$ 1 in dieser Vergleichung, und (S. 54) n . 1 = n. Man sehe l. d. R. pag. 72 - 76.

Noch augenscheinlicher läßt sich der Satz demonstriren, wenn man (nach g dieses S.) n als eine ganze Zahl setzet $= \frac{n}{1}$; so heißt also $\frac{f}{m} \cdot \frac{n}{1}$, man soll $\frac{f}{m}$ zu sich selbst $\frac{n}{1}$ mal nehmen, giebt also f . n = fn; nun ist aber f hier nur ein Theil von m, also kann auch das Product fn nur ein Theil von m, hier fn mal gesetzt ausdrücken: n selbst aber drückt hier nur (nach g) die n malige Setzung der Einheit aus, und daher, da das Product nothwendig seinen beiden Faktoren entsprechen muß; so kann, da $n = \frac{n}{1}$, so wie hier $f = \frac{f}{m}$ das Product also nicht seyn $\frac{fn}{m}$, sondern es muß nothwendig seyn $\frac{f}{m} \times \frac{n}{1} = \frac{f \cdot n}{m \cdot 1}$, also $= \frac{fn}{m}$ nach S. 58, b, u. 54.

Nothwendig muß daher, wenn beide Factoren Brüche, seyn $\frac{r}{n} \times \frac{u}{v} = \frac{ru}{nv}$; denn wenn $\frac{f}{m} \times \frac{n}{1} = \frac{f \cdot n}{m \cdot 1}$; so ist nothwendig auch $\frac{r}{n} \times \frac{u}{v} = \frac{ru}{nv}$. Da aber (S. 54) wenn $\frac{r}{n} \times \frac{1}{1} = \frac{r}{n}$; so muß nothwendig auch hier, da sowohl $\frac{r}{n}$ als $\frac{u}{v} \prec \frac{1}{1}$, auch sowohl

seyn $\frac{ru}{nv} \prec \frac{r}{n}$, als auch $\frac{ru}{nv} \prec \frac{u}{v}$. Man sehe l. d. R. pag. 76 - 78.

Nota. Leicht siehet man hier ein, daß $\frac{1}{x} . x = \frac{x}{x}$ $= 1$, also daß jeder Bruch in so viele Ganze verwandelt wird, als dessen Nenner in der Einheit seiner Zahl ausdrückt, wenn man ihn durch diesen seinen Nenner selbst multiplicirt. So sind denn z. B. $\frac{64x}{27} \asymp 27$ $= 64x$, den $\frac{1}{27} . 27 = \frac{27}{27} = 1$, und $\frac{2}{27} . 27 =$ zweymal $\frac{27}{27}$ oder $= 2$; also überhaupt: Wenn ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, so ist es eben soviel, als wenn der Nenner weggelassen würde, und der Zähler alleine stehen bliebe.

γ) Gleich der Multiplication mit Brüchen, steht auch das Dimensions-Verfahren mit solchen, unter einer allgemeinen Regel. Da die Dimension das entgegengesetzte von der Multiplication (S. 59, a), ihrem Wesen nach, (S. 59, b) nichts weiter als ein x maliges Subtrahiren des Dimensors vom Dimetiend ist, und wiederum im Bruche nur der Zähler (d) die eigentliche Zahl ist; so heißt also überhaupt auch mit einem Bruche dimetiiren, nichts weiter, als was dieser Begriff mit ganzen Zahlen anzeigen wollte. Da nun aber (S. 59, g,) sich nur Gleiches von Gleichen

x mal abziehen läßt; so hat man also hier nur darauf zu sehen, daß man (nach h dieses S.) Dimetiend und Dimensor auf eine Benennung bringt, (ist einer davon als Ganze gesetzt, solche als einen Zähler, dessen Nenner = 1 (nach g dieses S.) ausdrückt,) und nun das Dimensions-Geschäfte blos mit den Zählern, als den eigentlichen Größen verrichtet. So ist also n : $\frac{e}{f} = \frac{n}{1} : \frac{e}{f} = \frac{nf : e}{f}$ ($5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} : \frac{3}{4} = \frac{20}{4} : \frac{3}{4}$ $= \frac{6}{4} + \frac{\frac{2}{3}}{4}$). Wenn man nun aber hier so zur Mensur eine Zahl erhält, die größer scheint als das Dimetiend selbst; so muß man sich durch diesen Schein nicht täuschen lassen, denn wider die Vernunft ist es ja, daß eine in f malige Theile zerlegte Größe, einen ften Theil geben solle, der größer wäre, wie sie selbst. Wenn wir ferner gesehen haben unter β vorher, daß das Product von Brüchen nothwendig kleiner seyn muß, als jeder seiner es gegeben habenden Factoren; so sagt auch hieraus ein nothwendiger Schluß: daß bey der Dimension dagegen, eine noch malig kleinere Mensur gefunden werden müsse; und also kann nicht die Mensur von $\frac{20}{4} : \frac{3}{4} = 6\frac{2}{3}$ seyn, sondern, da Gleiches zu und von Gleichem nur dergleichen geben kann; so müssen ntel mit nteln gemessen, nothwendig auch dergleichen zu ihrer Mensur geben, also $\frac{20}{4} : \frac{3}{4}$ $= \frac{6}{4} + \frac{\frac{2}{3}}{4}$. Man sehe L. d. R. pag. 83 - 88.

Erwiesen unrichtig ist es also, wenn Mathematiker sagen: einen Bruch multipliciren hieße so viel, als solchen dividiren; und das Dividiren wäre dagegen eine Multiplication solcher.

Eben so ist $\frac{x}{y} : u = \frac{x}{y} : \frac{u}{1} = \frac{x : u}{y}$ $\left(\frac{7}{9} : 4 = \frac{7}{9} : \frac{4}{1} = \frac{1}{9} + \frac{\frac{3}{4}}{9} = \frac{7}{9} : \frac{36}{9} = \frac{7}{36}\right.$, und $\left.\frac{7}{36} = \frac{1}{9} + \frac{\frac{3}{4}}{9}\right)$

Denn der Bruch wird (nach b, NB. dieses S.) um so viel mal kleiner, als bey ungeändertem Zähler sein Nenner größer wird, daher ein Bruch auch mit x mal dimetiirt ist, wenn bey ungeändertem Zähler man seinen Nenner x mal vergrößert.

Sonach auch ist $\frac{e}{f} : \frac{n}{m} = \frac{e \,.\, fm : f}{fm} : \frac{n \,.\, fm : m}{fm}$

$\left(\frac{3}{4} : \frac{5}{11} = \frac{33}{44} : \frac{20}{44} = \frac{1}{44} + \frac{\frac{13}{20}}{44} = \frac{33}{880}.\right)$

NB. Wäre der (unter 2 dieses S.) angeführte Fall, daß der Dimensor eines andern Bruches größer als das Dimetiendum; so ist die Mensur nach dortigem Grunde, eben so auch hier nothwendig wieder ein Bruch aus einem Bruch. z. E. $\frac{2}{5} : \frac{3}{5} = \frac{2}{\frac{3}{5}}$.

Anm. Will man nach der gewöhnlichen arithmetischen Methode, Brüche durch Brüche zu dimetiiren

so verfahren, daß man sezt $\frac{e}{f} : \frac{g}{f} = \frac{e}{f} \times \frac{f}{g}$; so beruht dieses Verfahren auf dem Grunde: daß die Dimension ihrem Wesen nach grade das der Multiplication entgegengesetzte Verfahren erfordert; so wie nun $\frac{e}{f} \times \frac{g}{f}$, um $\frac{g}{f}$ vermehrt wurde, so wird es hier also um $\frac{g}{f}$ mal vermindert, wenn man es (nach Grund b, NB. dieses S.) mit dem umgekehrten Dimensor multiplicirte, und nun das Product, als das von einem Bruch aus einem Bruch betrachtet. Nemlich $\frac{2}{5} : \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{\frac{10}{15}}{5} = \frac{10}{75} = \frac{2}{15} = \frac{\frac{2}{3}}{5}$. Man sieht aber hier leicht den Vorzug ersterer allgemeinen Methode vor letzterer ein, da letzterer Grund nicht so leicht sich ergiebt und begreifen läßt, als ersterer, und jener den Vorzug der Allgemeinheit hat.

Satz 61. In wiefern nun (nach S. 59, a) das Dimetiiren eines Wievielen, dem Multiplications-Verfahren mit solchem entgegengesetzt ist; und daher denn auch dimitiiren weiter nichts, als ein möglich maliges Subtrahiren der einen Größe von der andern: so folgen aus diesem ihrem Wesen, weiter nachstehende Gesetze für die Dimension. Nemlich rücksichts S. 43 u. 56.

a) Entsprechend S. 41, g, h, u. 55, d, muß, um so viel mal das Dimetiendum größer oder kleiner wird, auch die Mensur um so viel mal größer oder kleiner werden. Die Mensur von e : f wird also mit m multiplicirt, wenn man sezt me : f; und dividirt durch m, wenn man seßet $\frac{e}{m}$: f.

Dagegen um so viel mal der Dimensor kleiner wird, um so viel mal muß die Mensur größer werden, u. umgek. die Mensur wird also von e : f mit m dimetiirt, wenn man seßet e : fm; und mit m multiplizirt, wenn man seßet e : $\frac{f}{m}$.

Hieraus fließen als unmittelbare Folgen:

α) Wenn man eine größere und kleinere Größe durch einerley Zahl dimetiirt; so ist der erstern Mensur größer, als die der andern, d. i. wenn a ≻ b; so ist a : n ≻ b : n.

β) Wenn man einerley Größe durch verschiedene Dimensors misset, so giebt der größere eine kleinere Mensur, als der andere; weil nothwendig je größer das angewandte Maas es auch um desto wenigere male in dem Dimetiendum enthalten seyn kann, u. umgek. Wenn also a : n ≺ a : r; so ist nothwendig n ≻ r.

γ) Eine kleinere Zahl also durch eine größere dimetiirt, giebt auch eine kleinere Mensur, als eine

größere durch eine kleinere Zahl gemessen. d. i. wenn a ≺ b, und n ≻ r; so ist a : n ≺ b : r. Denn Gleiches durch Gleiches dimetiirt, giebt Gleiches zur Mensur, d. i. wenn a = b und n = r; so ist auch a ; n = (b : r. S. 43, a u. 56, a.)

d) Von zwo gleichen Mensuren, hat diejenige, die einen größern Dimetiend hat, auch einen größern Dimensor; und die einen größern Dimensor hat, muß umgekehrt auch einen größern Dimetiend haben. Beruht und leitet sich aus β.

b) Wird die Mensur um so viele male größer oder kleiner, als man entweder das Dimetiendum, oder den Dimensor malig vergrößerte, oder verkleinerte; so muß solche auch ungeändert die nemliche bleiben, wenn man beide, Dimetiendum und Dimensor mit einerley Zahl multiplicirt, oder dimetiirt, d. i. e : f = em : fm; und e : f = $\frac{e}{m} : \frac{f}{m}$. Denn so wie (S. 41, d u. e) beide Ausdrücke a + b — b und a — b + b, eine unveränderte Größe anzeigen, und in Betrachtung S. 36 u. 43, a; eben so müssen auch die Größen im Verhältniß ungeändert bleiben, wenn man sie beide gleichmalig vermehrt, oder vermindert, d. i. sie müssen die nemliche Mensur behalten, und so nach auch ihre würkliche Größe unverändert.

c) Wenn (nach 41, b) a — b = d auch seyn muß a — d = b, so muß auch, wenn a : b = d,

seyn a : d = b. Denn, wenn (nach S. 59, f) d = a : b, nothwendig d . b = a seyn muß, so muß auch a : d = b seyn. Also „das Dimetiendum durch die Mensur gemessen, muß im Gegentheil von (S. 59, f) den Dimensor zur Mensur geben.“

Der Satz muß, wie alle unter diesem 61. S. angeführte Gesetze, also allgemein, und nicht, wie in den Mathematiken immer gewöhnlich, als nur von ganzen Zahlen gültig aufgestellt werden; und es ist sich die Sache bey Brüchen also vorzustellen: (nach S. 60, e) $5 : 3 = 1\frac{2}{3}$; also auch $\frac{15}{3} : \frac{5}{3} = 3$; nemlich man hat hier die Größe 5 erst in ihre Einheiten 1 + 1 + 1 + 1 + 1, und jede dieser Einheiten, nach Angabe der Benennung des Bruches in drey kleinere Einheiten wiederum zerlegt, I = 1 + 1 + 1 † I = 1 + 1 + 1 † I = 1 + 1 + 1 † I = 1 + 1 + 1 † I = 1 + 1 + 1; diese nun nach Angabe des Zählers genommen, lassen sich also genau so oft male wegnehmen, als der vorhergebrauchte Dimensor durch seine Einheit anzeigt, d. i. sie geben nun solchen nothwendig zur Mensur, und der erhaltene Ausdruck $\frac{15}{3} : \frac{5}{3} = 3$ zeigt hier nur wiederum die Zahl an, wie oft $\frac{5}{3}$ von $\frac{15}{3}$ sich wegnehmen ließen. d. i. wenn sich die 3 von der $5 = 1\frac{2}{3}$ mal wegnehmen ließen, so müssen nothwen-

dig auch $1\frac{2}{3}$ sich wiederum 3 mal von der 5 wegneh-
men lassen, denn, sowohl $3 \times 1\frac{2}{3}$, als auch $1\frac{2}{3} \times 3 = 5$.

Eben so daher: dimetiirt man ein Product durch einen seiner es gegeben habenden Factoren, so muß nothwendig der andere Factor zur Mensur erhalten werden, d. i. ab : a = b, denn ab ist entstanden aus b, solches a mal genommen, also ist a nothwendig b mal in ab enthalten.

d) Ist das Dimetiendum als ein durch seinen Dimensor mögliche male zu diminuirendes Minuendum, also in dieser Betrachtung als ein Ganzes, und der Dimensor, als ein mögliche male von ihm wegzunehmender Subtractor, also als ein Theil solches zu betrachten, und also die Mensur gleich einem Rest, als die Anzeige anzusehen, die hier nur angiebt, um wieviele mal der Dimensor ein kleinerer Theil als sein Ganzes das Dimetiendum; so muß nothwendig wie dort bey der Subtraction (S. 39, k), auch hier, im Gegentheil von dem Product in der Multiplication (S. 55), jede zur Mensur gefundene Größe, kleiner als ihr Dimetiendum seyn, aus dem sie als die Angabe eines x malig möglichen Theiles des Dimensors vom Dimetiend gefunden worden.

Hingegen kann, wenn e : f = d, hier, weil df = e (nach 59, f) seyn muß, d kleiner, größer oder gleich dem Dimensor seyn. Weil sowohl fd, als df alle d oder f malig mögliche Theile f oder d von e enthält, und also als malige Theile von e, dem Ganzen e selbst gleich ist, und sich also Dimensor und Mensur, in Beziehung auf das Dimetiendum, als ihrem Ganzen, wechselseitig als die maligen Nebentheile, oder die malig gesetzten Ergänzungen des einen Theiles zum Ganzen verhalten.

e) Doch aber, da hier in der Dimension, mit im Verhältniß gesetzten Größen verfahren wird, und nicht ein würkliches Wegnehmen eigenthümlicher Größen, wie in der Subtraction, statt findet, sondern: wenn Dimetiiren ein maliges Wegnehmen heißt, dieses nur in so fern statt findet, als das Dimetiendum als ein solches in möglich malige Theile zerlegt wird, als der Dimensor, als ein in der Einheit gesetztes Vielfache begreift, und die Mensur die würkliche Größe angiebt, wie oft sich das Dimetiendum in solche gleichmalige Theile des Dimensors zerlegen lasse; so kann man hier nicht wie in der Subtraction (S. 41, c) sagen: daß wenn der Dimensor gleich dem Dimetiendum, die Mensur = o wäre; sondern hier muß alsdann solche (nach Grund S. 58) nothwendig = 1 seyn. Denn so wie e sich selbst gleich seyn muß, also Einheit seiner Art ist, so muß also auch nothwendig seyn e : e = 1.

f) Wenn nach S. 42, b, dort a ✣ b — c = a — c ✣ b, so muß auch, wenn gegeben ist, a ✕ b : c, es gleichgültig seyn, ob man setze, ab : c, oder a : c . b.

Denn $a : c \,.\, b \left[= \frac{a}{c} \,.\, b = ab : c$, d. i. wenn eine Größe durch eine andere multiplicirt, und dann wiederum durch eine dritte dimetiirt werden soll: so ist es gleichgültig, ob man mit der Multiplication, oder Dimension anhebet.

Eben so gelten auch noch in dem Wesen der Dimension gemäßer Anwendung, für solcher Verfahren alle die Gesetze, welche nach S. 42 für das Subtractions-Verfahren aufgestellt worden.

Satz 62. Entsprechend den Gesetzen für die Erhaltung einer graden, oder ungraden Zahl im Product (56, Anm.), ergeben sich für die zu erhaltende Mensur folgende Gesetze.

a) Wenn eine grade Zahl durch eine grade dimetiirt eine ganze Zahl giebt; so kann solche sowohl grade, als ungrade seyn. Denn, man mag die grade, oder die ungrade durch den graden Dimensor multipliciren, so ist der Dimetiend, den das Product giebt, in beiden Fällen (nach 56, Anm. α) grade.

b) Wenn eine grade Zahl durch eine ungrade dimetiirt eine ganze Zahl giebt, so ist solche grade.

Denn, wäre sie ungrade, so wäre das Product aus ihr in dem Dimensor ungrade, und so also auch der Dimetiend. (56, Anm. β).

c) Eine ungrade Zahl durch eine grade dimetiirt, giebt niemals eine ganze Zahl. Denn, man nehme sie grade oder ungrade an; so wäre das Product aus ihr in dem Dimensor, folglich der Dimetiend in beiden Fällen grade. (56, Anm. α).

d) Wenn eine ungrade Zahl durch eine ungrade dimetiirt, eine ganze Zahl giebt; so ist diese ungrade. Denn, wäre sie grade; so wäre das Product aus ihr in den Dimensor, d. i. der Dimetiend, grade. (56, Anm. α).

Satz 63. Als Schlußresultat für die Multiplication und Dimension ergiebt sich denn endlich: daß Producte Gleichviele mit der maligen Setzung ihrer Faktoren sind; und Mensuren dagegen, als eine gleichvielmalige Ergänzung zum Ganzen, (den Dimetiendum) anzusehen sind, als die Einheit malig in dem Dimensor als einem Vielfachen enthalten ist.

Das S. 45 gezogene Schlußresultat aus den Gesetzen für eigenthümlicher Größen-Modificationen, gilt auch, unter Rücksicht auf das Wesen der Verhältnisse, für die Modificationen mit in Verhältniß gesetzten

Größen; daß nemlich bey der Multiplication das erhaltene Product, (nach dem Begriff solcher S. 53. 59, c. und 54, a) ein Gleichvieles mit der maligen Setzung seiner Factoren sey, nach Angabe der in ihnen als Vielfachen enthaltenen Einheit. Producte und Factoren lassen sich daher substituiren (26) und die Ausdrücke $e \asymp f = d$, oder $e \asymp f = ef$ sind gleichgültig. (45, a).

b) Eben so ist dagegen in der Dimension, entsprechend S. 45, b, nach dem Wesen dieser Größen-Modification (57. 58. 59, a, b, c, f u. 61, c), die Mensur als eine malige Ergänzung zum Ganzen (dem Dimetiendum) zu betrachten, nemlich so viel malig zu sich selbst gesetzt, als die Einheit in dem Dimensor, als einem Vielfachen, enthalten, und dieser als ein so viel malig vom Dimetiendum weggenommener Theil, oder als ein so viel maliger Nebentheil von der Mensur, die malig zu solcher gesetzt, sie dem Dimetiendum gleich macht, anzusehen ist. Giebt nun aber so die Mensur in der maligen Setzung zu sich selbst, als die Einheit in dem Dimensor, als einem Vielfachen, anzeigt, wieder ein mit dem Dimetiendum Gleichvieles; so bezeichnen alle diese Ausdrücke wiederum selbst Gleichviele, und es ist daher, entsprechend S. 45, c, einerley, ob man setzt $e:f = y$, oder $e:f = (e:f)$.

Satz 64. Man findet also hier (wie durch Addiren und Subtrahiren S. 46) durch die Multipli-

cation und Dimension, das einer bekannten Größe entsprechende unbekannte verhältnißmäßige Gleichviele, und beide fassen daher zusammen den Grund der Gleichungsrechnung mit in Verhältniß gegebenen und mit höhern Gleichungen in sich, welche denn, besonders erstere (nach S. 48, NB.) auf die allgemeinen Gesetze für Stammgleichungen gebauet sind: und entsprechend S. 47 also, fließen aus dem Wesen der Multiplication und Dimension, und den bisher aufgestellten allgemeinen Gesetzen für solche, für die Verhältniß-Gleichungen selbst diese wesentlichsten Gesetze, wenn man nemlich hier nach Erheischung der Zeichen, als mit malig zu setzenden, oder wegzunehmenden Größen verfährt.

a) Wenn (nach S. 47, a) ist $a \times b = c \times b$;
so ist auch $a = c$
$(6 \times \beta = 9 - 3 \times \beta)$

Eben so wenn $a : b = c : b$;
so ist auch $a = c$

b) Auch in der Verhältnißgleichung, kann man also die Zeichen der Glieder (nach 47, b) umkehren, und es muß doch wiederum Gleiches herauskommen.

Wenn a ⋊ b = e : f;
so ist a ⋊ f = e : b
(6 ⋊ 3 = 108 : (8 — 2) also auch 6 ⋊ (8 — 2) = 108 : 3)

und wenn
a ⋊ b : c = e : f;
so ist auch a ⋊ f = e : b ⋊ c
(6 ⋊ 3 : 2 = 18 : (3 — 1) so ist auch 6 ⋊ (3 — 1) = 18 : 3 ⋊ 2)

c) Gleich den Zeichen lassen sich daher auch in der Verhältnißgleichung (nach 47, c) deren Glieder selbst verwechseln.

d) Doch da, (nach S. 61, e) e : e = 1, und nicht wie in der Subtraction (41, c) n — n = o giebt; so wird daher auch eine Verhältnißgleichung, wenn man in ihr alle Größen des einen Gliedes mit verwechselten Zeichen in das andere bringt, nicht (wie 47, d) annullirt, sondern hier auf 1 gebracht. Denn,
Wenn a ⋊ b = e : f;
so ist a ⋊ b : e ⋊ f = 1
(6 ⋊ 3 : 108 ⋊ (7 — 1) = 1)

e) Nach Gründen 47, e, und denen S. 56, b und 61, b, bleibt auch in einer Verhältnißgleichung der Werth eines veränderten Ausdrucks ungeändert, daß also:

Wenn a ⋋ b : c ⋌ d : e
auch ist a ⋋ e ⋌ d : b ⋋ c.

f) Nach Grund a und b dieses S. und entsprechend S. 48, a, kann also auch in einer Verhältnißgleichung jede einzelne Größe von der einen Seite auf die andere gebracht werden, wenn man nur die Zeichen verändert, und statt ⋋ seßet : u. umgek. Man vergleiche 48, a.

g) So besteht denn in der, nach der Natur der gegebenen Größen nothwendig auf (f dieses S.) zu nehmenden Rücksicht, daß man nemlich bey Verhältnißgrößen das ⋋ in : u. umgek. verwandelt; übrigens das (S. 48, b) gegebene Gesetz für das Verfahren bey Auflösung einer Gleichungsrechnung, als ein allgemeines, das unter der hier bestimmten Modification auch für Verhältnißgleichungen gilt.

NB. Wenn wir nach der Beschaffenheit ihrer Glieder, Gleichungen aus zu erfindenden eigenthümlichen Größen (S. 46, Anm.) Stammgleichungen; und solche, die aus zu erfindenden in Verhältniß gesetzten Größen (63) bestehen, Verhältnißgleichungen genannt haben; so unterscheiden sich denn beide Arten in solcher Betrachtung wieder in reine und gemischte. Erstere sind, wo alle in der Gleichung gesetzte Größen, entweder lauter eigenthümliche, oder lauter Verhältnißgrößen sind; und letztere begreifen also derglei-

chen Gleichungen, wo die einzelnen in Gleichung gesetzte Größen eigenthümliche und verhältnißmäßige sind, mit welchen letztern Arten man im Rechnen häufiger, als mit erstern beschäftigt wird. Das Auflösungsverfahren mit letztern bleibt aber immer das nemliche nach der allgemeinen Regel, daß man nemlich nur (nach 48, b, und nach g dieses S.) + in — und × in : u. umgek. verwandelt, wenn man bey der Auflösung die Größen des einen Gliedes unter die des andern in der Gleichung bringet.

Z. B. zu einer Zahl das dreyfache ihrer + 50 gesetzt, macht eben so viel, als das siebenfache derselben — 26; So ist die Auflösung, wenn man die unbekannte Größe = x setzet.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 50 & = & 7x - 26 \\ + 26 & & -3x \\ \hline = 76 & & = 4x \end{array}$$

$$4x = 19.$$

β) Um daher in einer dergleichen Gleichung, nach dem allgemeinen arithmetischen Gesetz (S. 34) „daß sich nur Gleiches zu Gleichen setzen, und damit arithmetisch verfahren läßt," alles gleich zu machen; muß man in einer Gleichung alle in ihren Gliedern enthaltene Größen mit dem Nenner des Bruches, oder (wenn mehrere vorhanden) mit dem allgemeinen Nenner multipliciren, d. i. alle Größen (nach S. 60) von

gleicher Benennung machen, wo alsdann das weitere Auflösungs-Geschäfte das gewöhnliche ist. z. B.

Die Bibliothek eines Professors bestand, die Hälfte aus lateinischen, ein Viertheil aus deutschen Werken und 30 Stück französischen. Wie viel hatte also dieser gelehrte Mann Bücher? —

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 30 = x$$

$$= 2x + x + \frac{120}{1x} = 4x - 2x - x = x$$

$$1x = 120 \text{ Stück.}$$

Man vergleiche L. d. R. S. 394 bis 417.

Satz 65. Wie nach S. 13, a; 50, e u. f, der Exponent x die eigentliche Größe ist, auf welche in einer dergleichen Zusammensetzung von Größen gesehen wird; so hat man bey Vergleichungen von Verhältnissen selbst, auch nur auf diesen allein sein Augenmerk zu richten; und zusammengesetzte Verhältnisse; wie auch das Größern und Kleinern der Verhältnisse leiten daher ihren Grund; so auch, daß man Verhältnisse überhaupt wie Größen modificiren kann.

NB. Vom Größern und Kleinern der Brüche.

So lange man blos bey dem allgemeinen Verhältniß-Ausdruck e : f, ohne mit solchem eine Modification vorzunehmen, stehen bleibet; so ist blos die durch

solchen ausgedrückte ideelle Größe x, also der Exponent des Verhältnisses, das, worauf das einzige Augenmerk bey dieser Größenvergleichung gerichtet seyn soll, und kann. Dieser ist also nur die zu betrachtende Größe. Mehrere Verhältnisse daher in Vergleichung gesetzt, heißen gleich oder ungleich, und im letztern Fall größer oder kleiner, je nachdem ihre Exponenten als dergleichen Größen erscheinen: und es müssen diese daher, als Größen überhaupt betrachtet, unter den Gesetzen und Ausdrücken stehen, welche wir (S. 26 bis 30) als allgemeine für jede Größe bewiesen haben.

b) In wiefern sich nun (nach S. 54, a) jedes Product als ein Ganzes vorzustellen, von dem dessen es erzeugendes Multiplicandum ein so viel maliger Theil, als viel mal in dem Multiplicator die Einheit: — es also ein Vielfaches aus Vielfachen, durch malige Setzung eines seiner Factoren, nach Maasgabe der in solchem enthaltenen Einheit: — es also eine komplexe Größe: — und sonach in der Natur eines verhälnißmäßigen Aggregats gleich seyn muß der maligen Setzung eines seiner Factoren, nach Maasgabe der Einheit des andern, als seinem es so gebenden malig gesetzten Aggreganden: und weil in dieser Natur (nach 53, h) $a \asymp n.m = a \asymp (n.m)$; so folgt daraus, daß wenn man die Verhaltnisse $a \dot{\asymp} b = r$

$c \quad d = g$

$e \quad f = h$ als Verhältnisse, d. h. (53, h) malig zusammensetzt, daß man

nemlich (nach S. 34) alle Vorder- und Hinterglieder nach Anzeige ihrer enthaltenen Einheit malig zusammensetzt, das so erhaltene zusammengesetzte Verhältniß ace ⁘ bdf = rgh seyn müsse, als dem Produkte der Exponenten aller seiner einzelnen einfachen Erstehungs-Verhältnisse, solche nemlich als Verhältniß-Terminos malig zusammengesetzt. Dergleichen zusammengesetzte Verhältnisse, von denen übrigens alles das gelten muß; was von Verhältnissen überhaupt bestehet, drückt man allgemein aus:

$$a \div f = (a \div b) + (c \div d) + (e \div f) \text{ u. s. w.}$$

Nota. Diese Zusammensetzung von Verhältnissen zur Erhaltung eines einzigen, welches ein Product aus ihnen, gleich der Summe der maligen Setzung aller der unter ihm begriffenen einzelnen Bestehungsverhältnisse zusammen, giebt für die practische Arithmetic die sogenannte Kettenrechnung, als eine (nach L. d. R S. 79 u. 89) allgemeine Form für die Auflösung proportionaler Rechnungsforderungen, und die man mit Recht, ihrer allgemeinen Anwendbarkeit wegen in der ganzen Proportional-Rechnung, besonders nach der erleichterten Einrichtung, welche wir ihr dort gegeben haben, die Regulam auream in der practischen Arithmetic nennen könnte. Sie giebt nemlich in der practischen Arithmetic die intuitive Demonstration eines logischen Kettenschlusses, daß nemlich, wie in diesem, immer zwey und zwey Verhältnisse, wie Glieder in einer Kette, durch einerley Terminum, zur Erhaltung eines allgemeinen, allen in dieser Verkettung enthaltenen einzelnen Bestehungsverhältnissen, entsprechenden Resultats verbunden sind; und eben daher auch ihre Benennung Kettenrechnung.

c) Nach dem Wesen der Verhältnisse und ihrer Modificationen durch Multiplication und Dimension, ergiebt sich als Resultat für jedes Verhältniß: daß von dessen beiden bestehenden Gliedern, das größere (50, e, f) gleich sey einem Product des kleinern mit dem Exponenten; so wie dagegen das kleinere, gleich der Mensur aus dem größern, solches durch den Exponenten dimetiirt. Wird nun (nach 61, b) die Mensur von e : f = y nicht verändert, ob man setzet em : fm, oder $\frac{e}{m} : \frac{f}{m}$, und sind (nach 50, e, f) rücksichts der Größe, die sie an sich bezeichnen y und x (Mensur und Exponent) gleichgültige Ausdrücke: und will überhaupt (nach 59, h) der allgemeine Ausdruck e ⁘ f, wenn er nicht näher bestimmt wird, eine Dimension anzeigen; so muß dieses Gesetz überhaupt als ein allgemeines von allen Verhältnissen gelten, „daß nemlich der Exponent, als die eigentliche Größe in jedem Verhältniß, ungeändert bleibt, wenn man dessen beide Glieder mit einerley Zahl, sowohl multiplicirt, als dimetiirt.“ Ersteres heißt das Größern, letzteres das Kleinern der Verhältnisse. Durch welches letztere nicht nur die Verhältnisse weit faßlicher ausgedrückt, sondern auch große Abkürzungen in dem arithmetischen Verfahren mit solchem gewonnen werden.

α) Bleiben wir nun bey dem Kleinern der Verhältnisse stehen; so müssen überhaupt die beiden zu einander im Verhältniß gesetzte Größen, wovon die

eine, nach dem Wesen dieses Zusammenhanges (zu Folge 51) die andere bestimmen, oder messen soll, als in der Einheit gesetzte Vielfache (nach 51, NB. 2) erscheinen, und sie müssen an sich selbst (nach S. 22 u. 51) sich als rationelle Größen zu einander verhalten, so daß nemlich die eine selbst wiederum ein Aliquotum aus der andern ist, daß wenn in dem Ausdrucke e ⁘ f, sey f = ma, wiederum e = mf; so daß sie in der Natur eines zusammengesetzten Verhältnisses, daß in seine es gebende Factoren, aus deren m maligen Setzung es entstanden, zerlegt werden soll, erscheinen, weil es nun in diesem Fall (nach S. 22) möglich ist, daß beide Glieder des Verhältnisses durch einerley Zahl gemessen, und so gekleinert werden können (24. 25. 50, e. 51, b, c). Diejenige Größe, die sich nun als ein rationelles Maas von beiden Gliedern erweiset, und durch die also das ganze Verhältniß gekleinert werden kann, heißt das gemeinschaftliche Maas dieser beiden im Verhältniß stehenden Größen (24, a). Erhält man durch dieses Kleinern ein in andern Zahlen ausgedrücktes Verhältniß, dessen Glieder sich wiederum, als rationelle Größen zu einander verhalten, das also gekleinert in seinem Ausdruck doch wiederum als ein zusammengesetztes Verhältniß erscheint; so setzet man, entweder durch das nemlich gebrauchte, oder ein anderes statthaftes gemeinschaftliches Maas das Kleinern so lange fort, als man es entweder zur Absicht nöthig hat, oder bis man zu den Gliedern des Verhältnisses zwo Zahlen erhält, die sich wie Irrational-Größen

(22, b) gegen einander erweisen, und also (nach S. 25) Primzahlen unter sich sind; wo denn das Verhältniß durch seine kleinste Zahlen ausgedrückt heißet.

Nota. Irrationelle Verhältnisse (51, e) sind also sogleich, als Primzahlen unter sich, in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt. Denn Primzahlen nennt man solche: die als Vielfache kein anderes gemeinschaftliches Maas ihrer als die Einheit, das erste ihrer Entstehung, zulassen, — die nur mit der Einheit, der ersten Entstehung jeder hypothetischen Größe, bestimmt werden können.

β) Leicht ist nun in dem Verfahren mit allgemeinen Größenausdrücken dieses Kleinern der Verhältnisse, da man nach den Dimensions-Gesetzen für solche, nur in beiden Gliedern die gleichbedeutenden Ausdrücke in gleicher Menge auszustreichen hat, weil sie sich so hier, wie gleiche entgegengesetzte Größen zu einander verhalten, und sonach einander aufheben. Also $a \dot{:} b e \dot{:} d b e = a \dot{:} d$. Denn es ist das Verhältniß der Gleichheit $b \dot{:} b = o$, d. h. es giebt keine neue ideelle Größe, sondern es bleibet die reelle Einheit der gegebenen Größe, da sich jede Größe selbst gleich (27), und 1 weder multiplicirt, noch dimetiirt (58, b); und die Verhältnisse der Gleichheit sich so einander in der Zusammensetzung aufheben, sich also einander entgegengesetzt, eine, in Absicht auf die andere negativ sind, also, daß die verkehrte Verhältniß die negative der ordentlichen. (Ratio reciproca est directæ negativa.

γ) Schwerer hingegen hält es im Verfahren mit benannten Größen, dieses gemeinschaftliche Maas für zwo dergleichen im Verhältniß stehende zu finden, und man findet in den practischen Rechenbüchern darüber (wie l. d. R. S. 57 - 63) verschiedene Regeln gegeben, welche alle ihren Grund daraus herleiten: — wie nemlich jede zwo im Verhältniß gesetzte Größen (51, NB. 2), als in der Einheit gesetzte Vielfache ausdrücken, und sich also als Produkte aus der m maligen Setzung irgend grader oder ungrader Zahlen (44, e) vorzustellen sind; so muß nach dem Gesetz (56, Anm. α), jede grade Zahl nothwendig auch aus der m maligen Setzung einer graden Zahl entstanden seyn. Da nun nach (S. 61, c) ein Product durch einen seiner Factoren dimetiirt, den andern zur Mensur giebt, und bey einer graden Zahl, (sie als ein Vielfaches betrachtet) dieser eine Factor nothwendig eine grade Zahl seyn muß, von allen graden Zahlen aber (nach 44, e) die 2 als die kleinste nothwendig in jeder andern graden Zahl enthalten seyn muß (28, c); so besteht also als Gesetz: — daß sich jedes Verhältniß, „daß in „graden benannten Zahlen gegeben ist in seinen beiden „Gliedern, durch die Zahl 2 kleinerr lasse, u. s. f. nach „α d. S.“ Fände es sich, daß das Verhältniß in seinen Gliedern selbst wiederum aus einer m maligen Setzung der 2 zu sich selbst entstanden wäre; so sind diese Producte der m maligen Producte der 2 mit sich selbst, also 4, 8 u. f. dieses gemeinschaftliche Maas, welche das Verhältniß geschwinder in seiner kleinsten

Zahl darstellen, und dann in dieser Vergleichung das höchste gemeinschaftliche Maas heißen.

Nota. Aus dieser wesentlichen Eigenschaft grader Zahlen, daß sie sich durch 2 dimitiiren lassen müssen, hat man denn auch die in der Mathematic gewöhnliche Definition solcher, daß man sagt: grade Zahlen sind, die sich durch 2 ohne Rest dimetiiren lassen. Wofür man aber nur sehr fehlerhaft dividirer bis jetzt gesagt hat.

δ) Daher, wie (nach S. 53, k) ein Product von 10, 100, 1000 u. s. w. entsteht, wenn man diese Nullen blos dem Multiplicandum zu Ende beyfüget; eben so sind dagegen Verhältnisse, die auf Nullen in beiden Gliedern ausgehen, durch so viel malige Producte der 10 mit sich selbst gekleinert, als man gleich viel Nullen am Ende in ihren Gliedern löscht.

Nota. Hierauf gründet sich auch das Dimensions-Gesetz: daß im Gegentheil von 53, k, eine Zahl durch 10, 100, 1000 u. s. w. dimetiirt ist, wenn man ihr zu Ende blos so viele Zahlen abschneidet, als der Dimensor am Ende Nullen hat, und diese als einen Bruch von ihm zur Mensur schreibt.

So wie nun alle Zahlen, die aus der 10, oder einem m maligen Product solcher mit sich selbst entstanden, sich zuletzt mit Null endigen; eben so müssen dagegen alle Zahlen die als Producte von der Zahl 5 der Hälfte von 10 entsprungen, sich auch mit der halben Zehne, d. i. mit 5 endigen: und es sind sonach

alle Verhältnisse, die sich in ihren beiden Gliedern mit 5, oder mit 5 und 0 endigen, mit der Zahl 5, als ihrem gemeinschaftlichen Maas zu kleinern.

ε) Wie aber dagegen, jedes in der Einheit gesetzte Vielfache, wenn es sich (44, e) in seinen Einern mit einer ungraden Zahl endigt, sich selbst als ein Product aus einer ungraden Zahl charakterisirt (56, Anm. β); so kann dann auch für das gemeinschaftliche Maas von Verhältnißgrößen, die sich in beiden, oder einem Gliede mit ungraden Zahlen endigen, auch nur eine ungrade Zahl, nemlich, 3, 7 oder 9 genommen werden, je nachdem sie aus einer m maligen Setzung einer von diesen entstanden.

ζ) In welchen Zahlen ausgedrückt das in seinen Gliedern so gekleinerte Verhältniß wiederum erscheinen muß, dies ist schon vorher (S. 62) gelehrt und bewiesen worden, da man ja nun so das zu kleinernde Verhältniß als ein Dimetiendum, so wie das anzunehmende gemeinschaftliche Maas, als dessen Dimensor anzusehen hat.

η) Da jede Größe sich selbst gleich (27), und sonach denn auch das Maas von ihr selbst ist; so wird denn daher auch, weil (61, e) $e : e = 1$, jedes Verhältniß, das nicht in der Gleichheit gesetzt ist (β) gekleinert, wenn man mit dessen kleinern Gliede, das größere, so wie ersteres durch sich selbst dimetiirt, d. i.

wenn man ſetzet: $e \dot{:} f = \frac{e}{f} \dot{:} \frac{f}{f}$, wo es denn auf ein anderes gleiches Verhältniß (nach c) gebracht wird, deſſen kleineres Glied = 1, und das Verhältniß heißt nun durch ſeine allerkleinſte Zahl ausgedrückt (c, α); ſo wie alſo das allergrößte gemeinſchaftliche Maas (γ) von jedem im Verhältniß geſetzten Größen die kleinere von dieſen Größen ſelbſt iſt.

Nota. Es iſt alſo jedes Verhältniß, welches in der Einheit gegeben, ſchon durch ſeine kleinſte Zahl ausgedrückt, weil ein Etwas, das weniger als Eins wäre, undenkbar iſt (12, b).

τ) Auf gleiche Weiſe kann man denn nun auch, wie bisher (unter c) gelehrt worden, mit den in einem zuſammengeſetzten Verhältniß (b u. c, β) begriffenen einfachen Beſtehungsverhältniſſen, aus gleichem Grunde, verfahren, daß man ſolche aufhebet, wodurch das arithmetiſche Verfahren nicht nur ſehr erleichtert, ſondern das zuſammengeſetzte Verhältniß ſelbſt auch viel faßlicher ausgedrückt wird. Hätte man z. B. dieſe Verhältniſſe zuſammen zu ſetzen:

a ⁝ b = 3 ⁝ 6
b : e = 6 : 9
e : d = 9 : 12
d : f = 12 : 5

= a ⁝ f = 3 ⁝ 5, ſo ſiehet man, daß alſo a ⁝ f (3 ⁝ 5) hier den kürzeſten und faßlichſten Ausdruck für dieſe Zuſammenſetzung giebt. Denn,

leicht wird man einsehen daß der Ausdruck a ⁘ f, oder $\frac{a}{f}$ einerley mit abcd ⁘ bcdf, oder $\frac{abcd}{bcdf}$; 3 ⁘ 5, oder $\frac{3}{5} = 4374 \div 7290$, oder $\frac{4374}{7290}$ sey.

Dies ist also der Grund der Verkleinerung in der Kettenrechnung, und des ganzen dabey zu beobachtenden Verfahrens.

Das Verhältniß der Gleichheit g ⁘ g, ist daher in der Zusammensetzung, gleich wie an sich, anzusehen = 1 ⁘ 1, d. i. es ist als Null zu betrachten.

Geben die Verhältnisse f ⁘ h + g ⁘ k + k ⁘ g, das zusammengesetzte fgk ⁘ hkg; so müssen die Verhältnisse g ⁘ k und k ⁘ g in der Zusammensetzung einander aufheben, folglich, einander entgegengesetzt seyn, sie müssen sich wie negative und positive Größen gegen einander verhalten, k ⁘ g = — g ⁘ k; oder, die verkehrte Verhältniß ist die negative der ordentlichen. (c, β).

Anm. Diese bisher unter c dieses S. aufgestellten Gesetze für das Kleinern von Verhältnissen, so wie die vorher für die Multiplication und Dimension erwiesenen Gesetze S. 53, f, h, k und 59, c, γ, enthalten auch den Grund von der in der practischen Rechenkunde vorkommenden Practicrechnung, (L. d. R. S. 545 bis 557) womit die Rechenmeister so viel Aufsehens machen, und worinnen sie, Gott weiß! — welche Rechnungsvortheile und tiefverborgene Weisheit zu finden wähnen.

Wir kommen nun zu der NB. unsers Satzes.

Da Brüche ihrem Wesen nach (S. 60, e, f) als Quotienten zu betrachten sind, die, in wiefern sie als solche zu sich selbst in der Vergleichung als der Theil zu seinem Ganzen stehen, Aehnlichkeit des Wesens mit im Verhältniß gesetzten Größen haben; so können sie auch als solche betrachtet, und daher gleich Verhältnissen nach eben den (unter c dieses S. angeführten) Gesetzen, gegrößert und gekleinert werden, welches letztere bey Brüchen auch das Aufheben solcher genannt wird.

Das Größern und Kleinern, oder Aufheben der Brüche, ist also, da Brüche erst (nach S. 60) aus Dimensionen entstehen, aus dem Größern und Kleinern der Verhältnisse abzuleiten, und nicht umgekehrt, wie dieses zeither in den mathematischen Vorträgen zu geschehen pflegte, und welcher verkehrten Ordnung ich auch selbst l. d. R. S. 9, mich damals noch auf die seit Jahrtausenden als untrüglich gepriesene, bisher beobachtete mathematische Form verlassend, gefolgt bin. Durch Fallen lernen wir gehen; — durch Irren die Wahrheit finden. —

d) In wiefern der Exponent eines Verhältnisses überhaupt genommen, als eine Größe betrachtet werden muß; so können daher auch Verhältnisse wie jede andere Größe modificirt werden; wo denn die Aus-

drücke (a ⁘ b) + (c ⁘ d) Additionen; (a ⁘ b) — (c ⁘ d) Subtractionen; (a ⁘ b) ⋈ (c ⁘ d) Multiplicationen; und (a ⁘ b) : (c ⁘ d) oder $\frac{a \div b}{c \div b}$ Dimensionen von Verhältnissen bezeichnen. Man sehe Hindenburgs Erinnerungen bey Lempe Th. 1. pag. 319.

e) Je nachdem endlich (zu Folge c) in einem Verhältnißausdruck e ⁘ f, das Hinterglied desselben, als ein Product aus seinem Vorderglied mit dem Exponenten, also f = ex; oder als eine Mensur seines Vordergliedes, dimetiirt durch den Exponenten, also $f = \frac{e}{x}$ angesehen wird; so benennt man daher, weil im erstern Fall nothwendig f ≳ e (55), und im letztern f ≲ e (61, d) seyn muß, ersteres Verhältniß ein steigendes oder wachsendes, letzteres dagegen ein fallendes oder abnehmendes.

Nota. Das zu Ende S. 64, NB. β gezeigte Auflösungs-Verfahren mit Brüchen in Gleichungen, erhärtet also erst seinen Grund aus diesem S. 65, c. Denn durch diese Wegschaffung der Brüche in einer Gleichung, geschieht sonach weiter nichts, als daß die Verhältnisse der in der Gleichung stehenden Größen gegen einander, nur um ein Gleiches gegrößert werden, als wodurch ihr eigentlicher Werth gegen einander keine Veränderung leidet.

Satz 66. Zwey Verhältnisse sind gleich, wenn (nach S. 65, a) deren Exponenten solches sind. Giebt nun die Zusammensetzung zweyer gleichen Verhältnisse eine **Proportion**; so muß die ganze Lehre von diesen wiederum, nicht nur auf der Theorie von den Verhältnissen beruhen, sondern es muß auch vorzüglich das Verfahren, eine vierte Proportionalgröße zu finden, auf S. 65, e gegründet seyn.

a) Wenn e ⁘ f = x, und m ⁘ n auch = x; so heißt der Ausdruck e ⁘ f = m ⁘ n eine **Proportion**, wo denn besonders der Ausdruck e ⁘ f = f ⁘ z eine stetige **Proportion** heißt. Weil diese ganze Lehre der Arithmetik von der **Proportion**, auf der von den Verhältnissen, als des zusammengesetzten auf den es gebenden Theilen gegründet ist; so ist hier nicht nur keine weitläuftigere Auseinandersetzung dieser Lehre nöthig, sondern wir können auch daher wegen alles dessen, was wegen ihrem besondern Wesen, und ihrer daher fließenden Eintheilungen anzumerken wäre, nur auf das von uns hierüber schon gesagte, L. d. R. S. 12 bis 24 verweisen, wo denn der geneigte Nachleser, das dort aus den bisherigen Gründen zu verbessernde sich leicht selbst wird berichtigen können.

b) Eine **Proportion** ist also als ein verhältnißmäßiges Zusammengesetzte zu betrachten, und die zwey gleichen sie gebenden Verhältnisse sind die Theile die-

ser Zusammensetzung, so wie die einzeln in den Verhältnissen gesetzten Größen, wiederum die Glieder solcher bilden, welche im praktischen Rechnen ihrerseits wiederum mehrere Benennungen, aber nur als ein Glied, unter sich begreifen können, da ein Verhältniß nie mehr als zwey, und eine Proportion daher nie über vier Glieder enthalten kann.

c) Es fließt sonach aus b, daß wenn die Proportion eine steigende (65. e) weil in diesem Fall deren Hinterglieder (65. c) gleich Producten aus den Vordergliedern mit dem Exponenten, die Summe der Glieder ihres ersten Verhältnisses ein rmaliger Theil der Summe der des letztern seyn müssen. Denn der Theil muß in dem Ganzen enthalten seyn (28.); und da die Proportion als ein aus Verhältnissen entstandenes Ganze, also auch nothwendig ein dergleichen, d. i. ein rmalig Zusammengesetztes; so muß denn so das in seinen Zahlen kleinere Verhältniß, auch ein rmaliger Theil dieser Zusammensetzung selbst seyn. Also in dem Ausdruck $e \dot{:} f = m \dot{:} n$; ($e \prec f$; $m \prec n$ angenommen) ist $e + f =$ rmalig enthalten in $m + n$, und es muß seyn $e + f . r = m + n$; und umgekehrt $m + n : r = e + f$. ($7 \dot{:} 19 = 21 \dot{:} 57$ giebt $(57 + 21) : (19 + 7) = 3$; und also ist $(57 + 21) : 3 = (19 + 7)$; oder $(19 + 7) . 3 = (57 + 21)$

Ist dagegen die Proportion eine fallende, daß $n \succ m$, und $f \succ e$ angenommen, wo sonach (nach 65.

c) die Hinterglieder gleich der Mensur aus den Vorgliedern mit dem Exponenten; so muß die Summe der Glieder des letztern Verhältnisses (nach 63.) eine rmalige Ergänzung zu der des erstern seyn; und es muß also in dem Ausdruck n ⁘ m = f ⁘ e umgekehrt wiederum geben e + f . r = m + n, so wie m + n : r = e + f. Welches Gesetz demnach eine Probe für die Richtigkeit eines Proportionausdruckes giebt.

d) Sind rücksichts ihrer verhältnißmäßigen Größe (65. a) gegen einander, die beiden gleichen, die Proportion gebende Verhältnisse, entsprechend (b) also auch nothwendig die beiden gleichen Theile solcher; so müssen auch die beiderseitigen Summen ihrer Glieder ein gleiches Verhältniß ausdrücken, dem gleich, die Summe eines jeden durch sein kleineres Glied dimetiirt, d. i. in den Ausdrücken e ⁘ f = m ⁘ n muß seyn e + f : e = m + n : m; und in n ⁘ m = f ⁘ e muß seyn n + m : m = f + e : e.

e) Eben so müssen, wenn man den Exponent der Proportion = r setzet, da so in dem allgemeinen Ausdruck e ⁘ f = m ⁘ n, (es deute solcher nun eine steigende oder fallende Proportion an) nach Grund c dieses Satzes, e = fr und m = n r seyn muß, auch jedesmal das Product der beiden Mittelglieder, gleich seyn dem der beiden äußern mit einander. Denn en ist nun = nrf, und fm = rnf, (da Gleiches mit Gleichem multiplicirt gleiche Producte giebt,

56. a) = nrf, (da die Verwechselung der Faktoren ohne Einfluß auf das Product) und es ist also ne = mf, so wie jede Größen unter sich selbst gleich sind, wenn von mehrern eine jede eben derselben Größe gleich ist.

Diese beide unter d und e erwiesene Gesetze von der Proportion, erweisen sich sonach auch, gleich dem unter c als Proben für die Richtigkeit einer solchen, in welcher Natur man sich denn ihrer auch in dem praktischen Rechnen bedienet. L. d. R. S. 20 und 26.

f) In Erwägung der in diesem S. für eine Proportion angeführten Beziehungen und aufgestellten Gesetzen, ergiebt sich den nun in Gemäßheit S. 65. e das Auflösungsgesetz für die Erfindung der vierten Proportionalgröße, oder Gliedes, wenn davon schon die drey erstern gegeben sind. Nemlich, da (nach a dieses S.) in dem allgemeinen Proportionsausdruck e ⁘ f = m ⁘ n seyn muß; so muß und kann, wenn gegeben ist e ⁘ f = m ⁘ ....., das fehlende Glied nicht anders gefunden werden, als daß man, wenn e ⁘ f = x ist, und wenn die Proportion eine steigende, m als das dritte Glied mit diesem Exponenten multiplicirt; so wie gegentheils in der abnehmenden Proportion, man solches durch den Exponenten dimetiirt, und in beiden Fällen ist das Product oder die Mensur so man erhält, also im ersten Fall mx, im andern $\frac{m}{x}$, das verlangte vierte Proportionalglied.

Was man also in den mathematischen Lehrbüchern bis jetzt nur (L. d. R. S. 20 u. 26) als Probe für dieses arithmetische Verfahren aufgestellt hat, das erweiset sich so aus dem Wesen der Proportion just als die einzige richtige Auflösungsmethode bey solchen selbst: und die gewöhnliche Methode (L. d. R. S. 25), welche die mathematischen Lehrbücher alle vorschreiben, und die praktischen Rechenbücher, im Vertrauen auf ersterer hochgepriesene Infaillibilität nachschreiben, erweißt sich, da Verhältnisse nicht aus Brüchen, sondern (nach S. 60.) umgekehrt zu erklären sind, als ganz grundlos, und blos als eine Erfindung des Zufalls, nach dem Glauben jenes Mathematikers, welcher sagte: die Auflösungsmethode ist gleichgültig, wenn nur das nemliche Facit erhalten wird. Denn, da man zeither von Euclides an bis auf Lorenz, wie wir besonders im zweeten Bande dieses Buches evident erweisen werden, die Mathematik nicht als eine Wissenschaft, sondern lediglich als eine Kunstsache behandelt hat, — mögen mir die Herren Mathematiker diese Blasphemie verzeihen! — so ist es ihr wie allen Künsten ergangen: der Zufall hat Erfindungen gemacht, deren weiteres Ordnen dem spätern Nachdenken aufbewahrt geblieben.

NB. Was man im praktischen Rechnen nach den Gründen S. 24. 50. g. 51. NB. 54. d. 59. g. beim Ansatz einer dergleichen Aufgabe zu beobachten habe, davon siehe L. d. R. S. 26.

Das Aufl. Verfahren von der sogenannten Regula de Tri erscheint also hier sehr vereinfacht, und wenn man sie die Regulam auream nennt; so mag sie diese stolze Benennung eben so würdig tragen, wie der in der Geometrie vorkommende sogenannte Magister Mathesis.

g) Sind die einfachen Bestehungsverhältnisse einer Proportion zusammengesetzte, so geben sie auch eine dergleichen Proportion. — Wie aber (nach b) eine Proportion nie mehr als vier Glieder enthalten kann; so geben, wenn man praktisch zu einer gegebenen Größe, eine andere unbekannte, ihr verhältnißmäßig entsprechende, aus einer gegebenen Verkettung mehrerer Verhältnisse sucht, alle die in dieser Verkettung, zwischen der Frage und der gesuchten Größe liegende Verhältnisse (L. d. R. S. 63 u. 81), nur ein einziges, aus ihnen allen zusammengesetztes Verhältniß (65. b), welches als der erste Verhältnißtheil (b) in einer dergleichen zusammengesetzten Proportion zu betrachten; so wie die in der Kette gegebene Frage, und die auf solche, durch die Kette gefundene Größe, deren zweeter Verhältnißtheil ist. Daher muß sich denn in jeder Kettenrechnung, die in solcher gegebene Größe der Frage, zu der auf sie gefundenen Entsprechungsgröße gleich verhalten dem, aus den dazwischen liegenden verketteten einfachen Verhältnissen, entstandenen zusammengesetzten Verhältniß, als dem einen Verhältnißtheil in dieser Proportion. — Die-

ses Gesetz giebt uns also eine Probe für die Richtigkeit des praktischen Verfahrens mit der Kette, welche noch in unserm L. d. R. S. 89. zur Vollständigkeit dieser Lehre nachzutragen ist, und welche wir damals bey seiner Niederschreibung gewiß nicht würden übergangen haben, wenn wir nur von einem der bekanntesten mathematischen Lehrbücher, die wir uns zu Führern gewählt hatten, auf solche wären aufmerksam gemacht worden.

Nota. Nothwendig muß bey diesem Verfahren, wenn die gegebene Größe der Frage, als das erste Glied der Kette, noch andere Benennungen (als wie in der Interessenberechnung, den Fällen der Regulæ Quinque und Septem u. s. w.) unter sich begriffe, nach b dieses S. diese mit solchen multiplizirt, und in deren Product auf ein einziges Glied gebracht werden. Welches auch aus gleichem Grunde bey den übrigen Gliedern der einfachen in Verkettung stehenden Verhältnissen, beobachtet werden muß, wenn solche noch Unterbenennungen unter sich begreifen.

h) Zusammengesetzte Proportionen beruhen sonach ganz auf den Gesetzen für einfache Proportionen.

Satz 67. Von Verhältnissen (Raisons) sind wohl **Vergleichungen** (Rapports) zu unterscheiden, als welche blos sind: zween zu einander gesetzte eigenthümliche Größen, zur Bestimmung des reellen Unterschiedes der in ihnen, als Vielfachen enthaltenen reellen Ein-

heit. — Die gefundene Größe, welche dieses ausdrückt, heißt der Unterschied, oder die Differenz der in Vergleichung stehenden reellen Größen; und es beruhen also Vergleichungen auf den Gesetzen der Addition und Subtraction. Sie sind es, welche man allgemein, aber ganz grundlos, unter der Rubrik von arithmetischen Verhältnissen in den mathematischen Lehrbüchern aufgestellt schauen kann.

Wie wir (nach S, 7, h) nur von der hypothetischen Größe, die wir einem Etwas beylegen, einen Begriff haben; hypothetische Größe eines Etwas aber, nur aus Vergleichung mit sich selbst, mit der Einheit, die sie als ihr Maas als ein Vielfaches in sich begreift, erkannt und bestimmt werden kann (S. 11 u. 16); so müssen daher, da alle unsere Größenkenntniß nur auf Vergleichung, d. h. auf einer Angabe, in wiefern Eins und Dasselbeseyn zwischen der hypothetisch angenommenen Einheit, und den Einheiten, in die ein Wievieles zerlegt angenommen worden (11, a, b) beruhet; jede zwo zusammengesetzte Größen (nach S. 18), entweder als gleich, oder als ungleich, d. h. die eine größer, die andere kleiner vor der andern in dieser Zusammensetzung erscheinen: und eine dergleichen Zusammensetzung zwoer Größen, um sie gegen einander, nach dem gemeinschaftlichen Maas ihrer in ihnen, als Vielfachen (16), enthaltenen Einheit zu bestim-

men, ob sie gleich, oder, um wie viel die eine, nach diesem Maas, größer oder kleiner als die andere, giebt eine Vergleichung — Rapport — dieser Größe. Die gefundene Größe z nun, welche bestimmt, um wie viel, nach einer angenommenen Einheit, dergleichen in Vergleichung gesetzte Größen, im Fall sie nicht gleich, verschieden sind, heißt der Unterschied, die Differenz, dieser so verglichenen Größen (53, d).

b) Es bezeichnen aber hier beide in Vergleichung stehende Größen, eigenthümliche Größen, von denen jede ihr eigenthümliches hypothetisches Wieviele hat, und nicht erst, wie wir bey im Verhältniß gesetzten Größen gesehen haben, die eine etwa ihr Wesen als Realität, erst von einer maligen Vergleichung mit der andern erhielte; dagegen aber bezeichnet die Differenz, welche angiebt, um wie viel diese in Vergleichung stehende Größen, nach dem Maas der angenommenen Einheit, unterschieden sind, nur eine ideelle Größe. Gott mag es daher wissen, wie je einem Mathematiker hat einfallen können, eine dergleichen Größenzusammensetzung ein Verhältniß zu betiteln, und wie es gekommen ist, daß bis diesen Tag, von allen Mathematikern, jenem Vorgänger nachgebetet wird, der zuerst auf diesen unlogischen Einfall gerieth. Zwar steht in fast allen Kompendien in einer Note angemerkt: daß dieses wohl keine eigentlichen Verhältnisse und daß sie unter dieser Benennung auch sogar den Alten nicht bekannt gewesen wären: — aber, warum

wird denn nun ohnerachtet dieser Note, doch immer in den nach untrüglicher Form verfaßten Kompendien von arithmetischen Verhältnissen und Proportionen geredet! — Denn, da man wohl einsiehet, daß sie keine wahre Verhältnisse sind, so hat man denn nun sehr weislich arithmetische und geometrische Verhältnisse und Proportionen unterschieden, als unter welchen letztern man die eigentlichen Verhältnisse verstanden haben will. Eine Benennung und Eintheilung, die ganz ohne Sinn ist, und welche aus dem wunderbaren Begriff, den man sich zeither von der Geometrie gemacht hat, und der schnurrigen Eintheilung der Größe in stetige und unstetige, geflossen ist.

c) Man hat nicht gehörig Vergleichungen und Verhältnisse von einander unterschieden, und unlogisch, wie bey Subtraction und entgegengesetzten Größen, bey Brüchen, Quotienten, Mensuren, Exponenten und Verhältnissen, Aehnlichkeit der Wesen mit Gleichheit der Wesen verwechselt. Zwar ist es wahr, die Begriffe des Größer- und Kleinerseyns bezeichnen (II, e) nur etwas relatives, und so jeder Vergleichungsbegriff: hierin also Aehnlichkeit des Wesens der Vergleichungen mit Verhältnissen; — aber Aehnlichkeit der Wesen, und Gleichheit der Wesen, sind ja noch zu weit von einander unterschieden, als daß man dergleichen Dinge mit einerley Zeichen, oder Benennung bemarken könne? Wollen wir in

der Mathematic so unlogisch verfahren; so würden wir ja, da (nach 7. 11. 12. 16. 18) alle unsere Größenbegriffe nur auf Vergleichungen beruhen, gar keine eigenthümliche, sondern nur lauter ideelle Größen haben. — Welcher Mathematiker wird aber wohl je eine dergleichen Behauptung wagen wollen! — Findet also wohl Aehnlichkeit der Wesen hier statt; so besteht dagegen wiederum eine wesentliche Verschiedenheit dieser beiden Begriffe. Die Vergleichung schafft keine neue Bestimmung die nicht schon in der Eigenthümlichkeit der beiden verglichenen Dinge läge. Das Weib, bleibt Weib, der Mann, bleibt Mann, wenn ich sie blos als Menschen, etwa rücksichts ihrer Kräfte gegen einander in Vergleichung stelle. Dagegen giebt das Verhältniß (13. a. 46. Anm. 50. 51. 59. h) stets eine neue Bestimmung der einen Sache durch die andere, die ihre Eigenthümlichkeit verändert, und welche neue Bestimmung erst durch diese Zusammensetzung erzeugt wird. Ganz was anders wird das Weib im Verhältniß zum Mann unter dem Exponenten der heiligen Ehe, als sie in bloßer Vergleichung (par rapport), als Mensch zu Mensch, gegen diesem war. — Gleich sind in Vergleichung der unbetitelte, und der Hoch- und Oberbetitelte Gelehrte, wo nicht ersterer vielleicht gar noch einige pro Cent gut Gewicht rabbatirt, beide als von der Kaste der Gelehrten verglichen; anders aber, wenn man ersteren als einen ein Schulmeisteramt suchenden Kandidaten zu letzterm in Verhältniß stellt; denn dann er-

scheint er nicht als ein selbstständiges Etwas, das sein Etwas in sich selbst hat, sondern solches erst durch den Hoch- und Oberbetitelten Mann erlangen will, und der Exponent ist hier nicht selten Thürstehen, unbeantwortete Briefe und andere zu ertragende reelle Grobheiten und Insolenzen.

Eben so behält in dem Vergleichungsausdruck a ÷ b = z, jede von den beiden gesetzten Größen ihre Eigenthümlichkeit, ohne daß sie wie im Verhältnißausdruck (50. u. 51.) durch die ihr beygesetzte andere eine neue Bestimmung erhielt, welche sie ausser dieser Zusammensetzung nicht hätte, da hier durch das ideelle der Differenz, um wieviel, nach der in beiden, als Vielfachen, angenommenen gleichen Einheit (16.), die eine in dieser Zusammensetzung größer, oder kleiner vor der andern sey (18.), nichts in der Realität dieser Größen an sich geändert wird. Denn, wenn a ÷ b = z, angenommen a = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 und b = 1 + 1 + 1, also z = 1 + 1 um welches Maaß von der Einheit a ∠ b ist; so bleiben immer a die nemliche Größe = 1 + 1 + 1 + z, und immer b = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 — z, als Vielfache aus der Einheit, mit dieser nemlich (als dem Maaß aller Größe die als ein Vielfaches erscheint) gemessen, man mag sie ausser, oder in diesem Zusammenhange betrachten; welches aber der Fall bey Verhältnissen (nach S. 50. u. 51.) nicht war. (Man vergl. S. 13.) Der Ausdruck a ÷ b kann und darf daher auch nicht,

wie bisher fälschlich gelehrt worden, als ein Verhältnißausdruck, gleich S. 50. etwa a zu b, sondern es muß gelesen werden: a gegen b (nemlich gehalten — verglichen) = um z größer, oder kleiner. Denn es wird hier nicht gefragt: um wie viel mal, wie bey Verhältnissen 50. e; sondern nur, um wie viel nach dem, als Einheit in dem Vielfachen, angenommenen Maaße, eine dieser Größen kleiner, oder größer in diesem Zusammenhange sey.

d) Soll dieses aber bestimmt werden, so zeigt der Ausdruck a ÷ b ebenfalls (wie 50. e) eine Modification an, welche mit diesen beiden Größen vorgenommen werden soll: da aber a ÷ b, beide Ausdrücke eigenthümlicher Größe bezeichnen; so ist (nach S. 31. u. 32.) im Verfahren mit Vergleichungen keine andere Modification, als Addition, oder Subtraction anwendbar. Wie nun weiter von zwoen ungleichen Größen (18.) die größere (nach S. 28. c) die kleinere, als einen Theil ihrer in sich schließt; so ist denn hier Gesetz für die Vergleichungen, zur Erfindung ihrer Differenz: daß man die kleinere Größe von der größern abziehet (39. h.), wo denn der Rest die Differenz giebt, um wie viel diese Größen verschieden sind.

e) Der Rest giebt also in der Vergleichungsoperation durch die Subtraction nur die Differenz, nicht ist er aber mit dieser eines und desselben Wesens, eben

so wenig wie (nach 50. f 58. 59. c) solches Exponenten und Mensuren sind, woher wir denn auch in dem Kap. von der Subtraction, sorgfältig die Ausdrücke Differenz und Unterschied, als nicht dahin gehörige, vermieden haben. Denn, in der Vergleichung soll weder eine würkliche Zusammensetzung der verglichenen Größen, noch auch ein Wegnehmen der einen von der andern statt haben; sondern nur eine Bestimmung, um wie viel die eine davon größer, oder kleiner als die andere. Man erhält also durch sie weder würkliche Summen, noch Reste, sondern nur eine Differenz (Unterschied), (53. d.) worinnen also das eigene Wesen von Vergleichungen und Differenzen besteht, wodurch sie sich wiederum von Additionen und Subtractionen, Aggregaten und Resten unterscheiden. Denn weder können die Glieder der Vergleichung als alle die bestehende Theile eines Ganzen angesehen werden, das sie in ihrer Zusammensetzung als ein Aggregat aus sich gäben: noch auch als ein in allen seinen Theilen gegebenes Ganze, von welchem nach Wegnahme des einen davon, der andere als ein Rest nachbliebe, wie dies die Natur des Verhaltens der Addition und Subtraction (S. 39. a. 40. a) gegen einander ist.

f) Wie ferner in der Vergleichung die durch die angewandte Modification der Subtraction (d) zu findende Differenz, ein, beiden in der Vergleichung stehenden Größen, nothwendig entsprechendes Wieviele seyn muß; so können daher auch, um solches zu erzeu-

gen, (gleich wie bey Verhältnissen S. 50. g. 51. NB.) die beiden Glieder der Vergleichung nur gleichartige Größen seyn; und es sind daher Vergleichungsgrößen wesentlich ebenfalls auch von entgegengesetzten Größen (wenn wir deren Natur S. 40. betrachten) unterschieden, und auch mit diesen keinesweges zu verwechseln.

g) Daher aber, daß die Herren Mathematiker wiederum Vergleichungen mit Subtractionen und entgegengesetzten Größen, und diese beide abermals unter sich (S. 40.) verwechselt haben, sind sie auf die falsche Behauptung geführt worden: daß, gleich wie in der Subtraction und im Verfahren mit entgegengesetzten Größen (40. u. 41. c), auch der Vergleichungsausdruck $a \div a = o$ wäre. Eine offenbar falsche Behauptung. Sondern nach dem Wesen der Vergleichung, und dem Gesetz (27.), daß jede Größe mit sich selbst verglichen, auch sich selbst gleich seyn müsse; muß nothwendig seyn $a \div a = a \div a$. Also, was man in der Geometrie nennt kongruent. Kongruente Figuren aber heben sich ja einander nicht auf, vernichten sich nicht, sondern sie machen deren Wahl und Setzung nur gleichgültig, ob man, wenn a und b kongruent sind, a oder b annehmen wolle. Wenn ein Naturhistoriker schriebe, daß Wölfe und Bären gleich groß brutale und raubsüchtige Thiere wären, so sollte ja diese Gleichheits-Vergleichung nicht etwa heissen: daß sie einander vernichteten; denn da würde

ja ein jeder einwenden, daß so sehr sie auch nur immer auf einander heulen und brummen mögen, doch noch nie ein Wolf einen Bären, und umgekehrt, gefressen habe.

NB. Auch kann man eben so wenig sagen: daß $a \div a = 1$ wäre, wie dies der Fall bey $e : e$ (61, e), weil hier nach dem Begriff der Vergleichung, eben so wenig ein Messen, als ein würkliches Subtrahiren statt findet. Also in allen Fällen bleibt $a \div a = a \div a$.

h) Aus gleichen Gründen (wie S. 50, h) sehen wir, daß (nach e, f u. g) das bisherig gewöhnliche Zeichen, daß man einen Vergleichungsausdruck (als $a - b$) wie Subtractionen und entgegengesetzte Größen bemarkte, durchaus unanwendbar sey; und als ein, dem eigenthümlichen Wesen der Vergleichungen entsprechenderes haben wir daher diese Bezeichnung ($\div$) für solche gewählt.

i) Es müssen aber, wie bey Verhältnissen (51, NB. 2.), eben so auch aus nemlichem Grunde (22, NB.), die in Vergleichung gesetzte Größen an sich Vielfache bezeichnen.

k) Da nach dem Begriff der Vergleichungen, in ihnen nur der ideelle Unterschied bestimmt werden soll, der in ihnen als Vielfachen enthaltenen reellen Einheit: ein jedes Vielfache aber durch die Einheit gemes-

sen werden muß (19, b); so ist bey Vergleichungen keine Rücksicht zu nehmen, ob die in Vergleichung gesetzte Größen in rationellen, oder irrationellen Zahlen ausgedrückt sind.

l) Rücksichts der Aehnlichkeit ihres Wesens das Vergleichungen mit Subtractionen haben, ist sich in ihnen das Größere als die Summe von dem Kleinern und der Differenz vorzustellen, aber doch nicht, wie bey Subtractionen (39, i), als ein würkliches, sondern nach dem eigenen Vergleichungswesen, nur als ein ideelles Aggregat. Eben so verhalten sich hier das Kleinere und die Differenz, nur als ideeller Theil und Nebentheil, oder nur als ideeller Theil und Ergänzung zum Ganzen gegen das Größere, nicht aber als würklich in dieser Eigenschaft, wie solches Diminutor und Rest (39, k) sind. Nimmt man auf dieses eigene der Vergleichungen immer die gehörige nothwendige Rücksicht; so stehen sie übrigens wegen der Aehnlichkeit ihres Wesens mit Addition und Subtraction, unter den allgemeinen Gesetzen für diese Größenmodificationen.

m) Wegen ihrer Aehnlichkeit des Wesens mit Verhältnissen dagegen (c), ist auch bey Vergleichungen nur die Differenz, die eigentliche Größe, worauf man bey ihnen, entsprechend (65, a) zu sehen hat: nur daß man hier in allen Verfahren mit Vergleichungen (nach d), nur nach der Addition und Subtraction,

als mit eigenthümlich gesetzten Wievielen verfahren muß.

n) In Gemäßheit (von m) also, lassen sich Vergleichungen wie Verhältnisse (65, b) zusammensetzen, daß sie in der Summe ihrer Vorder- und Hinterglieder also eine neue zusammengesetzte Vergleichung geben, gleich der Summe der Differenzen der einzelnen einfachen Bestehungsvergleichungen zusammen.

Anzumerken ist aber hier, daß bey Vergleichungen, rücksichts der Aehnlichkeit des Wesens, welche sie (nach e. f. g. l.) mit Subtractionen und entgegengesetzten Größen haben, hier in einer dergleichen Zusammensetzung, (entsprechend S. 40) alle einfache Bestehungsvergleichungen, so wie sie dieses auch an sich, in der Natur (von l) als entgegengesetzte Größen, zu betrachten, und daß sonach, — wie alle fallende Vergleichungen eine positive, so dagegen alle steigende eine negative Differenz geben müssen; und da (S. 39, f) Subtrahend und Minuend unverwechselbar sind, — auch hierauf bey einer dergleichen Zusammensetzung von Vergleichungen nothwendig in der Bezeichnung der Differenzen Rücksicht zu nehmen, und daß also zusammengesetzte Vergleichungen, sich nur in der Summe ihrer Differenzen verhalten können, wie ein Aggregat aus sich entgegengesetzten Aggreganden. Also:

α) Eine aus lauter fallenden Vergleichungen bestehende Zusammensetzung, giebt eine zusammengesetzte Vergleichung, deren Differenz positiv, und gleich ist der Summe aller der positiven Differenzen der einzelnen einfachen Bestehungsvergleichungen. Z. E.

$$\begin{array}{r} 6 \div 3 = +3 \\ 7 \quad 5 = +2 \text{ also} \\ \hline 13 \div 8 = +5; \end{array}$$

β) Dagegen ist:

$$\begin{array}{r} 3 \div 6 = -3 \\ 5 \quad 7 = -2 \text{ also} \\ \hline 8 \div 13 = -5; \end{array}$$

γ) Besteht aber die Vergleichungszusammensetzung aus fallenden und steigenden Bestehungsvergleichungen, also auch aus verschiedenen Differenzen; so muß nothwendig das aus ihnen summirte Verhältniß, gleich seyn einer Summe, die man erhalten hätte, wenn man diese einzelne Differenzen als entgegengesetzte Größen summarisch verglichen hätte, und so ist z. B.

$$\begin{array}{r} 6 \div 3 = +3 \\ 4 \quad 8 = -4 \\ 7 \quad 5 = +2 \text{ also} \\ \hline 17 \div 16 = +1. \end{array}$$

Exempel:

$$\begin{array}{r} 2 \div 3 = -1 \\ 5 \quad 8 = -3 \\ 9 \quad 4 = +5 \\ 16 \quad 12 = +4 \\ 5 \quad 10 = -5 \text{ also} \\ \hline 37 \div 37 = 37 \div 37 \text{ nach g dieses Satzes.} \end{array}$$

o) Nach dem Resultate (l dieses S.), wie sich von den in Vergleichung gesetzten Größen, die größere

gegen die kleinere, und letztere dagegen zu ersterer verhalte: und dabey immer nur auf die Differenz (m), als das eigentliche Wieviele dieser ideellen Größenverbindung zu sehen ist; und, da Gleiches zu Gleichen gesetzt, eben so auch Gleiches von Gleichen abgezogen (36 u. 43, a), Gleiches giebt: a + b — b, wie a — b + b (zu Folge 41, d u. e), eine unveränderte Größe anzeigen: und (nach d) rücksichts des Wievielen das sie an sich bezeichnen; Reste und Differenzen einerley Größe anzeigen: und, wie überhaupt (nach d) der Ausdruck a ÷ b eine Subtraction anzeigen will; — so muß (wie 65. c) auch bey Vergleichungen die Differenz, als die eigentliche Größe, auf die bey solchen zu sehen, — ungeändert dieselbe bleiben, wenn man zu beiden Gliedern der Vergleichung (entsprechend d) einerley Größe hinzusetzt, oder von beiden abzieht, und es ist sonach a ÷ b = (a + c) ÷ (b + c), imgleichen (a — c) ÷ (b — c). Vergleichungen lassen sich also wie Verhältnisse, aber ihrer Natur gemäß durch Addition und Subtraction, ihrer Differenz d. i. ihrer Vergleichungsgröße unbeschadet, größern und kleinern, und durch letztere Operation sich also weit faßlicher ausdrücken. (Man vergleiche hierzu k dieses S.)

Nota. Denn wollte man die Glieder einer Vergleichung, als eigenthümliche Größen, verhältnißmäßig modifiziren, d. h. mit einerley Zahl multipliziren, oder dimetiiren; so wird dadurch ihr Wesen

ganz verändert, daß man also nicht die nemliche Vergleichungsgröße behalten kann, sondern, so wie in der Vergleichung (nach m) nur die Differenz die eigentlich zu berücksichtigende Größe ist, diese also auch in diesem Falle nur multiplizirt, oder dimetiirt werden kann; so erhält man an deren statt nothwendig eine andere, gleich dem Product, oder der Mensur der Differenz der ersten Vergleichung, mit der zum Multiplicator, oder Dimensor gebrauchten Zahl. Alsdann, wenn $a \div b = z$, so wird $an \div bn = zn$; und $\frac{a}{n} \div \frac{b}{n} = \frac{z}{n}$.

Anm. 2. Nach Grund (65. c. k. N.) ist also auch jede Vergleichung in ihrer kleinsten Zahl ausgedrückt, wenn man deren kleineres Glied $= 1$ setzt. Nicht aber darf man hier wie bey Verhältnissen schließen: daß nun auch in dem Ausdruck $a \div 1$ das größere a selbst die Differenz, wie dort der Exponent, sey; sondern weil hier in $a \div 1$, die 1 gleich a eine Eigenthümlichkeit anzeigt, die, um die Differenz zu finden, von a subtrahirt werden muß, so kann denn allemal $a \div 1$ nichts anders seyn als $= (a - 1)$. Auch kann man hier, um $a \div b$, ($a \geq b$ angenommen) in seinen allerkleinsten Zahlen auszudrücken, nicht wie bey Verhältnissen (65. c. k) etwa verfahren: daß man $(a - b) \div (b - b)$ setzen wollte, denn da würde man (nach 41. c) für die Differenz einen Rest $= 0$ erhalten, welcher als ein hier so erhaltenes absolutes

Nichts alle Vergleichung mit a aufhöbe, sondern man muß hier nothwendig also verfahren, daß man seßet a ÷ b = (a — b — 1) ÷ (b — b — 1).

Satz 68. Giebt überhaupt die Gleichheit zweer Größenausdrücke, die sich als eine komplexe Größe charakterisiren, eine Proportion; so giebt denn also auch der Ausdruck zwoer zusammengeseßter gleicher Vergleichungen (Rapports), eine Vergleichungs-Proportion, welche man so, zum Unterschied von der Verhältniß-Proportion (66.), die man auch gerade hin eine Proportion nennt, benennen muß.

a) Wie die ganze Lehre von Verhältnißproportionen, (nach S. 66.) auf der von Verhältnissen beruhte, eben so gründet sich also auch die Lehre von Vergleichungsproportionen (nicht arithmetischen Proportionen) auf die oben S. 67. vorangegangene Lehre von Vergleichungen, als der, von den sie begründenden und gebenden allen Theilen ihrer, und es kann daher auch mit Vergleichungsproportionen, da das Ganze allen seinen es gebenden Theilen entsprechend seyn muß, (nach Grund 67. 1) nur nach der Addition und Subtraction verfahren werden. Wenn also e ÷ f = x, und auch m ÷ n = x; so giebt der Ausdruck e ÷ f = m ÷ n eine Vergleichungsproportion; und

der Ausdruck e ÷ f = f ÷ z heißt dann wieder besonders eine stetige Vergleichungs-Proportion.

b) Entsprechend (S. 66. b.), und in Gemäßheit (67. e. f. g. l) ist jede Vergleichungsproportion, als eine eigenthümliche Zusammensetzung zu betrachten, deren zwo sie gebende gleiche Vergleichungen, die Theile solcher Zusammensetzung, so wie die einzelnen verglichenen Größen wiederum, deren Glieder sind; und jede Vergleichungsproportion kann demnach, ihrem Wesen (a) gemäß, nicht mehr als zwo in ihr bestehende Vergleichungen, und also auch nicht mehr als vier Glieder begreifen. Daher folgt denn

α) Ist die Vergleichungsproportion eine steigende, in welcher sich also, (in Gemäßheit 67. l.) die Hinterglieder als Summen aus ihren Vordergliedern und Differenzen vorzustellen sind; so muß ebenfalls (wie 66. c) die Summe der Glieder ihrer ersten Vergleichung ein rmaliger Theil der Summe der letztern seyn. Denn da nothwendig (nach S. 28.) das Kleinere in dem Größern als ein Theil in seinem Ganzen enthalten ist, und nun jede Vergleichungsproportion als ein aus ihren Vergleichungstheilen bestehendes Ganze anzusehen: Ganze aber aus der rmaligen Setzung ihrer unter sich begriffenen Theile entstehen (12. 17. 24. 30. 28. 33.); so muß denn nothwendig auch hier, die in ihren Gliedern kleiner ausgedruckte Vergleichung, als ein Theil von der Vergleichungsproportion, als ein

rmalig zu sich gesetzter Theil, gleich seyn der Summe der Glieder der ihr gleichen, aber in größern Zahlen hier in ihren Gliedern ausgedrückten zwoten Vergleichung, mit der sie zusammen eine Vergleichungsproportion, als ein Ganzes giebt. Nimmt man sonach an e ≺ f, und m ≺ n; so ist in dem Ausdrucke e ÷ f = m ÷ n, wenn gemessen werden m + n durch e + f = r, und es muß seyn m + n = e + f . r, oder m + n : r = e + f.

Ist dagegen die Vergleichungsproportion eine fallende, daß n ≻ m und f ≻ e angenommen, wo sonach (gemäß 67. l.) die Hinterglieder als Theile mit ihrem Nebentheil (der Differenz), oder als Theil und Ergänzung zu den Vordergliedern anzusehen; so muß die Summe der Glieder der letztern Vergleichung (gemäß α) dagegen eine rmalige Ergänzung zu der der erstern seyn, und es muß also in dem Ausdruck n ÷ m = f ÷ e wiederum umgekehrt geben e + f . r = m + n, so wie n + m : r = f + e.

β) Wie bey Verhältnißproportionen (66. e) so ist auch in dem Ausdruck a ÷ b = c ÷ g, hier a + g = b + c. Denn man setze die Differenz der beiden gleichen Bestehungsvergleichungen = d; so ist, wenn wir a ≻ b und c ≻ g annehmen (nach S. 67. l), a = b + d, und c = g + d. Mithin, da Gleiches zu Gleichen, Gleiches geben muß (36.); so muß denn auch a + g = b + d + g, und b + c = b + g + d

$=$ b $+$ d $+$ g (zu Folge 33. Anm.) seyn; also ist a $+$ g $=$ b $+$ c, nach dem Grundgesetz: daß wenn von mehrern Größen eine jede eben derselben Größe gleich ist, solche unter einander selbst gleich sind.

Die Gesetze unter α und β geben sonach die Probe für die Richtigkeit von Vergleichungsproportionen.

c) Aus dem bisher gezeigten Wesen von Vergleichungsproportionen, und nach dem Gesetz der Erfindung der Differenz einer Vergleichung (67. d.), ergiebt sich also als das einzige mathematische richtige Gesetz für die Erfindung einer fehlenden vierten **Vergleichungsproportionalgröße**, was man zeither nur als eine Probe angesehen hat: — daß man nemlich in einer steigenden Vergleichungsproportion, zum dritten Gliede die Differenz zuaddiren, und in einer fallenden diese von solchem abziehen müsse. — Die erlangte Summen, oder Reste geben die gesuchte Größe, entsprechend S. 66. f. — Findet man aber hier in allen mathematischen Compendien als Verfahrungsregel aufgestellt: daß in dem Ausdruck a $\div$ b $=$ c $\div$ g, gefunden werde g $=$ c $+$ b $-$ a; so hat es mit solcher eben so seine Bewandniß wie S. 66. f.

d) Wie bey Verhältnissen (S. 66. g), geben auch hier zusammengesetzte Vergleichungen dergleichen Proportionen, die aber ebenfalls nur, nach dem Begriff einer Proportion, aus vier Gliedern bestehen

können; wie solche überhaupt auf den Gesetzen für einfache Vergleichungsproportionen beruhen.

Noch müssen wir hier zu S. 65. b von zusammengesetzten Verhältnissen nachtragen.

Satz 69. Bey der Bildung zusammengesetzter Verhältnisse, war es, wie wir gesehen haben, gleichgültig, ob die einzelnen einfachen Bestehungsverhältnisse von einem zusammengesetzten, unter sich ungleich, oder gleich waren: ist aber letzterer Fall; so erhalten die daraus entstehende zusammengesetzte Verhältnisse wiederum die besondere Benennung vervielfältigte, oder multiplicirte Verhältnisse. Ein jedes einfache darunter begriffene Verhältniß aber heißt ein submultiplizirtes Verhältniß.

Wenn nun also:

1) $a \dot{:} b = c \dot{:} d$ $(1 \dot{:} 2 = 3 \dot{:} 6)$

giebt

$a \dot{:} d = (a \dot{:} b) + (c \dot{:} d)$

$3 \dot{:} 12 = (1 \dot{:} 2) + (3 \dot{:} 6)$;

imgleichen wenn

2) $a \dot{:} b = c \dot{:} d = m \dot{:} n$, d. i.

$(1 \dot{:} 2 = 3 \dot{:} 6 = 4 \dot{:} 8)$

giebt

$a \dot{:} n = (a \dot{:} b) + (c \dot{:} d) + (m \dot{:} n)$

$12 \dot{:} 96 = (1 \dot{:} 2) + (3 \dot{:} 6) + (4 \dot{:} 8)$;

so sind a ⁘ d, imgleichen a ⁘ n multiplizirte Verhältnisse, und die darunter begriffene einfache Bestehungsverhältnisse, sowohl a ⁘ b, als c ⁘ d, wie auch m ⁘ n submultiplizirte Verhältnisse.

Zusatz.

Zuletzt müssen wir hier auch noch von dem verhältnißmäßigen Verfahren mit entgegengesetzten Grössen (13, b. 40. 41, c u. 44, e) gedenken.

Nach dem erwiesenen Grundsatz: daß man nur Gleiches zu Gleichem in Verhältniß stellen, und also auch verhältnißmäßig nur mit Gleichem in Gleiches verfahren könne; ist also jedes verhältnißmäßige Verfahren mit entgegengesetzten Größen, als mit solchen an sich, grade zu ohnmöglich, und eben so wenig als sich (44, e) entgegengesetzte Größen, als solche, addiren lassen; eben so wenig kann man dergleichen durch einander multipliziren, oder dimetiiren. Wie man daher gewöhnlich in den mathematischen Kompendien (außer daß ich finde, daß Herr Bursa den wahren Grund dieser Sache zum Theil richtiger gesehen) lehret: daß a . (— b) = — ab, und — a . (+ b) = — ab, und (— a) . (— b) = + ab; eben so a : (— b) = $-\frac{a}{b}$, und — a : (+ b) = $-\frac{a}{b}$, und (— a) : (— b) = $+\frac{a}{b}$ sey, (denn der Ausdruck a, b, oder a : b gehört ganz und gar nicht hierher);

so enthält dieses eine wahre Ungereimtheit, und je gelehrter und dunkler die solches unterstützen sollende Beweise klingen, desto mehr Ungrund enthalten sie nur, und werden bey dem Schüler nie etwas anders, als auf Authorität blindlings nachgebetete Glaubensformeln seyn. Denn, das Menschengeschlecht muß erst noch geschaffen werden, dessen Denkform ihm sagen sollte: — daß Nichts und Etwas zusammengesetzt ein Nichts; und Nichts mit Nichts, und in Nichts ein Etwas erzeugte. — Dies zu erklären, glaube ich, wird selbst der Denker Kant nicht wagen wollen: und doch, was kann man nicht alles angeblich beweisen! — wenn man nur Leute findet, deren Glaube Berge versetzen kann — ambirt man, diese so scharfsinnig ausgedachte Theorie selbst intuitiv zu demonstriren. Eine intuitive Demonstration, nach welcher sich auch des Teufels Schwanz beweisen läßt, denn er ist ja so abgemalt in vielen Kirchen- und Katechismusbüchern zu sehen. Daher, sagt denn Herr Bursa: muß man in Rechnungen und logischen Folgerungen, welche die imaginairen Größen betreffen, etwas behutsam umgehen, daß man nicht auf Widersprüche gerathe. Man muß sich nicht darüber in zu tiefe metaphysische Künsteleyen einlassen. — So sagt Herr Bursa, besser aber würde er gethan haben, wenn er sich lieber in metaphysische und logische Untersuchungen eingelassen hätte, als daß er solche grundlos aus seiner Wissenschaft zurückweiset. Gewiß würde er dann auf dem Wege; den er schon richtig zu betreten anfing, zum

Ziele gekommen seyn, alle diese Widersprüche heben zu können. Denn was soll das für eine Wissenschaft seyn, welche eine metaphisische und logische Untersuchung ihrer Theorien zu scheuen hat!

Inzwischen bestehen die Ausdrücke a . (— b) und (— a) . b, und (— a) . (— b), und so Rücksichts der Dimension. Es fragt sich also: welches ist deren wahre Bedeutung, und nach welchem dieser entsprechenden Gesetze müssen sich die daher entstehende Producte und Mensuren ergeben? —

Nach dem Wesen der entgegengesehten Größen, zeigt überhaupt (nach 41, c u. 44, e) jeder entgegengesetzte Ausdruck einen Subtractionsausdruck an, wo die entgegengesetzte Größe dieses nur in Beziehung auf ihr entgegengesetztes ist, und also jede entgegengesetzte Größe als eine komplexe zu betrachten ist, die als ein Rest von einem größern Diminutor (als das Minuendum) nachgeblieben, und also zu ihrem einen vorstehenden Theil = o hat, und in Beziehung auf die Beschaffenheit der bey ihr anzunehmenden vorstehenden o, ihre Bezeichnung (nach 44, e, β) in die entgegengesetzte verwandelt.

α) Daher, wenn es in der Multiplication heißt: daß a . (— b) = — ab; so ist sich vorzustellen, daß der Ausdruck a . (— b) eigentlich sey = a . (o — b) = oa — ab, da nun aber oa = o; so bleibt denn

nothwendig nur — ab aus dem ganzen Producte von a . (— b), als ein Rest von dem ganzen Producte = oa — ab, nicht aber als ein Product selbst übrig.

β) Von gleicher Beschaffenheit muß daher seyn (— a) . b = — ab, als wie wenn gestanden hätte: (o — a) . b = ob — ab, so daß, da ob = o, nothwendig nur — ab, nicht als ein Product, sondern nur als der Rest eines Products = — y (in der Natur wie 41, c) verbleibet.

γ) Endlich muß (— a) . (— b) = ✢ ab also erklärt werden, daß sich vorzustellen: daß (nach 44, β) eigentlich stehen müßte — (o $\frac{-}{*}$ a) . — (o $\frac{-}{*}$ b), wo also — a und — b als noch zu einer dem — o vorstehenden Größe x zu zuaddirende Größen zu betrachten sind, wo denn das Product nothwendig = — oo ✢ ab; ist aber — oo = o; so ist also in diesem Ausdruck die allein übrig bedeutende Größe ✢ ab, als eine solche zu betrachten, die hier noch zu einer positiven Größe x hinzuzusetzen, die um = oo = o verringert worden.

Daß es sich nun eben so bey der Dimension verhalten müsse, ergiebt sich ohne weitere Demonstration von selbst.

Von den Progressionen.

Satz 70. Wie Satz 66 die Zusammensetzung zweyer gleicher Verhältnisse eine Verhältniß-Proportion giebt, so besteht die Möglichkeit, daß man ins Unendliche fortgehend dergleichen gleiche Verhältnisse, in der Natur, als gegebener stetiger Proportionen (66, a) zusammensetzen kann; welche Zusammensetzung denn daher auch von dieser ihrer Natur die Benennung einer Verhältniß-Progression führt, und haben muß. Die einzelne so zusammengesetzte Grösßen, heißen die Glieder der Progression, welche nach der Zahl ihrer Menge, das erste, zweyte und nte Glied genannt werden; so wie die Größe, welche das gleiche Verhalten jeder zwey Glieder zu einander in solcher ausdrückt, der Exponent der Progression ist; welcher denn, wie der jedes Verhältnisses, weil hier lauter gleiche Verhältnisse zusammengesetzt sind, gefunden wird, durch die Dimension des größern Gliedes durch das kleinere: eben so, wie denn auch nothwendig jedes folgende Glied in einer dergleichen Progression, wie bey einer Proportion (S.

66, f) in der Zahl des Products, oder der Mensur des nächstvorhergehenden Gliedes mit dem Exponenten, je nachdem die Progression als eine steigende, oder fallende (65, e) angesehen wird, gefunden werden muß.

NB. Da jede zwo, in der Progression zunächst auf einander folgende Größen, in dem Zusammenhange eines Verhältnisses zu einander stehen; so müssen sie ebenfalls durch das Verhältniß-Zeichen (50, h) verbunden werden.

Die Progressionen stehen also unter dem allgemeinen Geschlecht von zusammengesetzten Verhältnissen (65, b), ihr spezifischer Unterschied aber, wodurch sie sich von diesen, sowohl im allgemeinen, als von den vervielfältigten (69) insbesondere, wiederum unterscheiden ist: — daß sie eine fortgehende Zusammensetzung gleicher (69) und stetiger (66, a) Verhältnisse sind: eine Verbindung gleicher Verhältnisse, in welchen jedes Hinterglied auch zugleich wieder als das Vorderglied eines neuen Verhältnisses mit der ihm nächstfolgenden Größe, und also zweymal gelesen werden muß. Denn giebt der Ausdruck

3 ∴ 6 ∴ 12 ∴ 24 ∴ 48 ∴ 96 ∴ 192 ∴ .....

eine Progression; so ist sich vorzustellen, daß solche gleich ist den zusammenhängenden stetigen Proportionen

3 ∴ 6 = 6 ∴ 12 = 12 ∴ 24 = 24 ∴ 48 .....

NB. Schreibt man über die Glieder einer Progression, um die Menge ihrer zu bemerken, vom ersten Gliede an, eine natürliche Zahlenreihe, so bezeichnen diese, das wievielste Glied ein jedes in einer dergleichen Progression sey, und diese überstehende natürliche Zahl heißt daher der Zeiger der Progression. Wo, wenn dieser Zeiger über dem letzten Glied einer Progression eine gerade Zahl ist, die Progression zwey, im Gegentheil aber nur ein Mittelglied hat.

b) Daß sich also Verhältnisse, Proportionen und Progressionen nur wie Geschlechter und Arten unterscheiden; in der Art aber, ausser dem spezifischen Unterschied auch alle Bestimmungen liegen müssen, die sich als wesentliche ihres Geschlechts characterisiren; so stehen daher Progressionen auch unter den nemlichen Gesetzen, die sich bisher als allgemeine für erstere erwiesen haben. Diesem zu Folge ist denn auch

α) in der steigenden Progression jedes folgende Glied immer = einem Product aus dem vorhergehenden mit dem Exponenten; und in der abnehmenden, = eine Mensur aus dem vorhergehenden mit dem Exponenten; — oder, es ist in der steigenden Progression immer das vorhergehende ein Faktor, der mit dem Exponenten multiplicirt, das folgende zum Product giebt; — und in der fallenden, gleich einem Dimetiendum, das durch den Exponenten dimetiirt, das folgende als seine Mensur giebt. — Wie sich nun

weiter Dimension und Multiplication (nach 59. a) direct entgegengesetzt sind; so siehet man, daß nach dem eigenthümlichen der Progression (a), überhaupt eine fallende Progression nichts weiter, als die umgekehrte steigende, oder die solcher entgegengesetzte negative ist, und also die Gesetze für letztere auch die Bestimmungen von ersterer sind.

β) Jede endliche Progression ist als ein verhältnißmäßiges Zusammengesetzte (nach S. 66. b und rücksichts a dieses S.) zu betrachten, deren bestehende Glieder die gleichmaligen, diese Zusammensetzung gebende Aggreganden sind. Jedes Vorderglied ist daher in der steigenden Progression, wenn der Exponent = r, als ein rmaliger Theil seines Hintergliedes (66. c); und in der fallenden ist das Hinterglied als eine rmalige Ergänzung zu seinem Vorderglied zu betrachten; woher denn auch nothwendig jedes letztere Glied in einer Progression größer, oder kleiner als die Summe aller vorstehenden seyn muß.

γ) Man nehme jede vier unmittelbar auf einander folgende Glieder aus einer Progression, welche man wolle; so geben sie eine Proportion (66). Drey so verbundene Größen demnach, die als die drey sich unmittelbar folgende Glieder einer Progression sich charakterisiren, heissen daher auch drey proportionirte Größen, weil sie (nach a) sich als eine stetige Proportion vorzustellen sind, das mittlere Glied nemlich

zweymal gesetzt. Daher, wenn $a \dot{\times} b = r$; so findet man $a \dot{\times} b \dot{\times} c$, (hier c als das dritte Proportionalglied, nach 66. f) $= br$, oder, wenn $a \prec b$; so findet man solches $= b : r$.

d) Auch hier ist, wie bey Verhältnissen, der Exponent nur die eigentliche Größe auf welche man zu sehen hat. 65. a.

ε) Zu Folge α giebt eine Progression in ihren einzelnen Gliedern lauter rationelle Größen, deren jede gleich einem rmalig gesetzten Vielfachen aus dem ersten Gliede (22); und wenn man dieses demnach durch sich selbst mißt, so müssen (nach 24. a, c) alle übrige bestehende Glieder sich genau auch durch dieses erste Glied messen lassen; und es läßt sich demnach unbeschadet ihrer Verhältnißgröße (nach 65. c, k) jede Progression, die nicht 1 zu ihrem ersten Gliede hat, auf eine andere gleiche bringen, deren erstes Glied 1 ist, und die sonach, weil die 1 weder multiplizirt, noch dimetiirt (58. b) den Exponenten selbst zu ihrem zweiten Gliede hat. In dieser Rücksicht begreifen denn auch dergleichen Progressionen, deren erstes Glied $= 1$, die allgemeine Gesetze für alle mögliche Progressionen, und wir werden daher künftighin nur diese zu unserm Augenmerk haben.

Aber eben weil die 1 weder multiplizirt noch dimetiirt; so kann die 1 auch keine Progression geben, und

es muß daher nothwendig der Exponent jeder Progression ein Vielfaches aus der Einheit seyn. (Man vergl. 65. c, β) — Ferner, jede Progression auf eine solche gebracht sich vorgestellt, deren erstes Glied = 1, das zweite also ihr Exponent; so fließt daraus: weil a, das erste hier, als eine strenge Einheit (16.) zu betrachten, die also, als noch kein verhältnißmäßig Vervielfältigtes anzusehen ist; daß denn auch in jedem Progressionsverfahren das erste Glied als eine Null-Verhältniß-Größe (nach 65. c, β) angesehen werden muß.

Doch wuß aber nothwendig das erste Glied einer Progression = 1 ihrer Art seyn, weil die übrigen alle aus seiner rmaligen Setzung, als die Verhältnißgrößen aus der sie erzeugenden eigenthümlichen (nach Begriff und Wesen der Verhältnisse 50. u. 51.) ihren Grund ableiten müssen, da das erste Glied nie = 0 seyn kann, weil Verhältnisse, die ihren Grund in = 0 hätten, undenkbar sind, und nur der Theolog, nie aber der Mathematiker, aus Nichts etwas kann werden lassen. Es existirt aber keine Größe, die weniger als 1 wäre, (12. b) also muß das erste Glied jeder Progression nothwendig 1 seyn.

NB. Die Eins kann hier aber auch (nach 12. u. 13.) in einem Bruche ausgedrückt seyn.

ζ) Heißt nun überhaupt eine Sache gegeben, d. i. bestimmt, wenn alle ihre wesentliche Stücke durch deren, dem ganzen Wesen der Sache entsprechenden Zusammenhange sich die Sache selbst finden läßt, angegeben sind; so ist also jede endliche Progression durch ihr erstes Glied a, ihren Exponenten r, (oder an dessen statt durch ihr zweites Glied nach unserm S. u. ebendas. b, ε) und durch ihren Zeiger n, als durch alle ihre wesentliche Stücke, gegeben.

Satz 71. Nennt man überhaupt eine, nach einem bestimmten Größengesetz immer wachsende, oder abnehmende stetige Verbindung komplexer Größen, eine Progression; so muß denn auch eben so die Möglichkeit von Vergleichungsprogressionen statt finden, welche man also, zum Unterschied von Verhältnißprogressionen, die auch schlechtweg nur Progressionen heissen, benennen muß. Da auch hier jede zwo in der Progression zunächst auf einander folgende Größen in dem Zusammenhange einer Vergleichung gegen einander (67. c) stehen; so müssen sie ebenfalls durch das Vergleichungszeichen (67. h) verbunden werden. Man unterscheidet bey ihnen auch ihre Glieder, nach der Menge der enthaltenen Einheit in dem darüber geschriebenen Zeiger, und sie selbst wiederum in steigende und fallende. Das Gesetz, nach welchem solche immer

wachsen, oder abnehmen, kann aber bey ihnen, als eigenthümlich gesetzten Größen, kein anderes als ihre Differenz seyn, welche hier nun die Differenz der in Vergleichungsprogression gegen einander stehenden und fortgehenden Größen heißet.

a) Vergleichungsprogressionen sind das, was man in allen mathematischen Kompendien unter dem Titel arithmetischer Progressionen beschauen kann, die aber, wie wir S. 67. c gezeiget, in der ganzen Natur der Dinge nicht existiren können. Auch sie stehen ihrem Wesen nach als Art unter dem allgemeinen Geschlecht von zusammengesetzten Vergleichungen (67. n), nur mit dem spezifischen Unterschiede, daß sie eine fortgehende Zusammensetzung gleicher und gleichartig stetiger Vergleichungen bilden; in welchen demnach wie bey Verhältnißprogressionen (70. a) jedes Hinterglied, als wie wenn es zweymal, nemlich auch zugleich in der Natur eines Vordergliedes gesetzt wäre, betrachtet werden, und daher denn auch zweymal gelesen werden muß. Mit Berücksichtigung ihres spezifischen Unterschiedes, fassen denn die allgemeinen Gesetze für Vergleichungen und Vergleichungsproportionen (67. u. 68.), auch zugleich die der Vergleichungsprogressionen nothwendig, wie jeder Grund das in und durch ihn gegründete, in sich; so wie auch daher, in wie weit (nach 67. c) Aehnlichkeit des Wesens zwischen ihnen mit Verhältnißprogressionen statt

findet, sie mit unter den allgemeinen Gesetzen dieser (70.) stehen, wenn man nur, nach Erforderniß ihres Wesens für Producte, Mensuren und Exponenten, hier Aggregate, Reste und Differenzen setzet.

Nach Grund (67, m), hat man denn auch bey ihnen also nur auf die Differenz, als die eigentliche Größe dieser Zusammensetzung zu sehen.

Je nachdem sich auch hier der Zeiger über dem letzten Glied einer Vergleichungsprogression als eine grade, oder ungrade Zahl characterisirt, hat es mit ihr die nemliche Beschaffenheit wie 70, a, NB.

Es fließen denn sonach aus a:

α) Entsprechend S. 70, b, α, sind also in jeder Vergleichungsprogression jede zwo nächst auf einander folgende Größen, je nachdem sie steigend, oder fallend, von der Natur S. 67, 1 und 68, b zu betrachten. Wie es denn mit der fallenden hier eben die Beschaffenheit wie 70, b, α haben muß, da sich Subtraction und Addition (nach 39, h, u. 47, b, c) als einander direct entgegengesetzte Größenmodificationen verhalten, d. i. fallende Vergleichungsprogressionen sind als negative der steigenden anzusehen.

NB. Doch kann man hier nicht sagen, wie bey Verhältnißprogressionen S. 70, b, ε, daß die Differenz, wie dort der Exponent, nothwendig ein Vielfaches aus der Einheit seyn

müsse; sondern nach dem Begriff von Vergleichungen (S. 67), kann diese eben sowohl die streng angenommene Einheit (16), als ein aus ihr entstandenes Vielfache seyn. Denn, giebt die strenge Einheit wohl keine Verhältnißgröße; so muß sie doch immer ein eigenthümliches Wieviele geben, da immer 1 = 1 ist, und nie 1 = 0 seyn kann, sie als ein eigenthümliches Wieviele genommen. (Man vergleiche S. 6.)

β) Entsprechend 70, b, β, ist nach S. 68, b jede endliche Vergleichungsprogression zu betrachten, als ein dergleichen Zusammengesetztes, deren bestehende Glieder die gleichvieligen (67, c) solche gebende Aggreganden sind; und in dieser Rücksicht, und ihrem eigenen Wesen gemäß, muß es sich daher bey ihnen, wie S. 68, b, α verhalten, da auch hier jede unmittelbar auf einander folgende vier Glieder (entsprechend 70, b, γ) eine Vergleichungsproportion (68) geben, und die Vergleichungsprogression nichts weiter als eine Zusammensetzung von lauter stetigen gleichen Vergleichungsproportionen ist, die sich hier wieder als Theile zu dieser ganzen Zusammensetzung verhalten, wie die Glieder in einer dergleichen simpeln Proportion. (68, b, α).

NB. Drey so verbundene Größen demnach, die sich (wie 70, b, γ) als drey unmittelbar folgende Glieder einer Vergleichungsproportion characterisiren, heißen daher auch hier drey in Vergleichungsproportion stehende Größen, weil es sich mit ihnen (nach l. l.) verhält. Daher, wenn in dem Ausdruck a ÷ b ist

$b = a + r$; so wird (wie 67, c) allemal c, die dritte in Vergleichungsproportion stehende Größe gefunden werden müssen $= b + r$; oder wenn $a \prec b$, so muß seyn $c = b - r$.

γ) Entsprechend S. 70, b, ε, und ihrem Wesen gemäß, läßt sich auch jede Vergleichungsprogression, die zu ihrem ersten Gliede $= a$ nicht 1 hat, nach den Gesetzen (S. 67, o), unbeschadet der Größe ihrer Differenz auf eine andere bringen, deren erstes Glied $= 1$ ist. Z. B.

$$-5-1)\frac{5 \div 8 \div 11 \div 14 \div 17}{1 \div 4 \div 7 \div 10 \div 13};$$

Doch aber giebt nun hier, nach dem Wesen des Gesetzes für Vergleichungsgrößen (S. 67, o, NB. 2) das zweite Glied in der Zahl für seine Größe nicht etwa selbsten auch (wie dort S. 70, b, ε) die Differenz, sondern es muß hier solche noch, wenn das zweite Glied $= b$ (nach 67, d) $= b - 1$ gefunden werden.

1) Wegen der Aehnlichkeit des Wesens aber, das zusammengesetzte Vergleichungen, in den Gliedern ihrer Zusammensetzung (nach 67, n), mit Subtraction und entgegengesetzten Größen haben, und wegen ihrer weitern Aehnlichkeit auch mit Verhältnißprogressionen; kann man auch hier in einer Vergleichungsprogression, das erste Glied a von sich selbst, und allen ihren bestehenden Gliedern subtrahiren, wodurch denn solche auf eine andere von gleicher Differenz gebracht

wird, deren erstes Glied = o (S. 41, c), und das zweite alsdann nothwendig die Differenz selbst ist: und es ist in diesem Fall, eine Vergleichungsprogression in ihrem möglichst kleinsten Zahlen ausgedrückt, weil ja in ihr, nach ihrem Wesen, außer dem ersten Gliede, keine kleinere Zahl, als ihre Differenz (die Größe der Vergleichungsprogression selbst, existiren kann. Z. B.

$$-5) \frac{5 \div 8 \div 11 \div 14 \div 17}{0 \div 3 \div 6 \div 9 \div 12};$$

Wie sich nun aber jede Vergleichungsprogression, unbeschadet ihres Vergleichungswerthes, so durch eine andere, deren erstes Glied = o ist, vorstellen, und so in ihren einfachsten Zahlen ausdrücken läßt: das Einfache aber immer den Grund des Zusammengesetztern nothwendig in sich schließt; so enthalten also auch dergleichen Vergleichungsprogressionen den Grund aller möglichen übrigen in sich, und wir werden denn daher diese auch nur vorzüglichst betrachten.

Es hat aber eine dergleichen Kleinerung in einer Vergleichungsprogression ihre Richtigkeit. Denn, es bestehet würklich zwischen den Begriffen Verhältniß, Proportion und Progression; und so auch zwischen Vergleichung, Vergleichungsproportion und Vergleichungsprogression ein specifischer Unterschied, daß man sie wohl wegen der Aehnlichkeit ihres Wesens, für einander setzen, nie aber gänzlich mit einander verwechseln kann. Siehet man bey der bloßen Verglei-

chung und Vergleichungsproportion, welch eine hypothetische Größe, die eine gegen die andere gehalten, beide durch eine angenommene Einheit gemessen, habe (67, c); so kann freylich (nach Grund 67, o, Not. 1.) kein Vergleichungsglied hier = o seyn. Ist aber dagegen das Wesen der Progession: daß man hier nicht so wohl fragt, welche hypothetische Größe die eine gegen die andere gehalten habe; sondern, welche Größe ein hypothetisches Wieviele habe, wenn ich es ideell, oder reell, mehrere male nach Annahme eines festgesetzten Maaßes setze, oder als ein solches gesetzte annehme; so siehet man leicht, daß bey eigenthümlichen Größen, das, was noch keine Einheit dieses angenommenen Maaßes begreift, ein Negatives von solchem, also in Vergleichung gegen dieses gesetzt = o ist: also jedes erste Glied einer Vergleichungsprogression = o ist; weil es noch keine gesetzte Einheit nach dem Maaße solcher ausdrückt, sondern dieses erst der Fall im zweiten Gliede ist: und bezeichnen hier alle Glieder eigenthümliche Größen, die ihr Wesen, als Größen, reell in sich selbst haben; so ist also daher in einer Vergleichungsprogression das zweite Glied, die wahre erste Progressionalgröße, die wahre erste, aus dem Maas der Differenz entstandene Größe, der vorher, in Beziehung auf diese Differenz, nothwendig Null stehen muß, weil Nichts, das dem Etwas vorgehende, die Null also das vorstehende der Eins ist; daher es denn auch fließt, daß in Modificationen, die man an mit Vergleichungsprogressionen vornehmen kann,

das erste Glied immer = o betrachtet werden muß, weil es noch keine Einheit in solcher ist, die Differenz nemlich hier für die Einheit angenommen.

Wie es sich dagegen mit Verhältnißprogressionen verhalte, und daß im Gegensatz dort, wenn hier das erste Glied nothwendig = o, solches in jenen dagegen = 1 seyn müsse, ist schon (S. 70, b, ε) erwiesen worden.

Giebt hier in der Vergleichungsprogression (nach α, NB.) die 1 schon eine Differenz, und also eine Progressionalgröße; so steht ihr also als erstes Glied, als das, was noch keine Progressionalgröße nach irgend einem möglichen Vergleichungsprogressions-Maas ist, nothwendig die Null vor; dagegen, da bey Verhältnißprogressionen (nach 1 l.) nie die 1 ein Exponent seyn kann, also nie die kleinste Größe einer Progression geben mag, sondern diese nothwendig ein Vielfaches seyn muß; so muß dort daher das erste Glied in einer Verhältnißprogression nothwendig = 1 seyn, weil man dort, nicht wie hier Vielfache aus der maligen Setzung der Einheit, sondern aus der maligen Setzung eines Vielfachen sucht, dem Vielfachen aber nothwendig die Einheit vorstehen muß; so wie hier der Einheit die Null.

2) Setzet man daher eine Vergleichungsprogression, die nur die strenge Einheit mißt (16), ihr erstes

Glied = a, sey welcher Größenausdruck es wolle, und reducirt solche nach γ, 1; so erhält man eine Reihe natürlicher Zahlen, deren erstes Glied = 0, das zweite selbst = 1. Z. B.

$$-7)\frac{7 \div 8 \div 9 \div 10 \div 11 \div 12}{0 \div 1 \div 2 \div 3 \div 4 \div 5};$$

Sind nun jede zwo Größen, die sich als natürliche Zahlen gegen einander verhalten, nächste Größen (S. 44); so stellt demnach jede Vergleichungsprogression deren Differenz = 1, eine Reihe nächster Größen dar.

δ) Entsprechend (70, b. ζ.) ist sonach auch jede Vergleichungsprogression durch ihr erstes Glied a, ihre Differenz r, (oder an deren statt zu Folge γ durch ihr zweites Glied) und ihren Zeiger n gegeben.

NB. Die Eins kann hier aber auch (nach 12 u. 13) in einem Bruche ausgedrückt seyn.

Gradation, Degradation, Exponentiation und weiteres arithmetisches Verfahren mit Progressionen und Proportionen.

Satz 72. Setzet man in einer Verhältnißprogression (S. 70) das erste Glied = 1, und den Exponenten also zum zweiten Glied; so führt dieses denn uns endlich auf die Gradation,

Degradation und Exponentiation, als noch drey verschiedenen Arten von Modificationen in einem gewissen Verhältniß gesetzter Größen; je nachdem man hier auf die Größe siehet, welche als ein Product, oder als eine Mensur erzeugt werden soll; oder daß man die Bestimmung des Grades selbst erforschet.

a) Setzen wir eine Verhältnißprogression (nach 70. b, ε) in ihren kleinsten Zahlen, also 1 ⁘ r, wo daher nach Grund (l. l) das erste Glied in keinen weitern Betracht mehr kommt; so ist nothwendig das dritte Glied = rr, das vierte = rr . r, das fünfte Glied = rrr . r, so daß jedes nte Glied als ein Product erscheint aus dem Exponenten, (diesen zuerst mit sich selbst multiplicirt, und die erhaltene Producte immer wieder nach Angabe der Einheit des hier zu einem stetigen Gesetz angenommenen Exponenten malig zu sich selbst gesetzt, daß so, so viel malig, nach Maasgabe der Einheit des Exponenten, mit diesem immer wieder zu sich selbst gesetzt worden, als der Zeiger weniger 1 (also im nten Glied = n — 1) anzeiget.

α) Auf diese Weise aber mit einer Größe verfahren, — daß man sich solche zuerst als einmaliges Product aus der Einheit vorstellt, als ihre Benennung in einem Vielfachen ausdrückt, und sie nun weiter, als ein Product aus der Multiplication mit sich selbst, und so immer fort, als ein mit ihrem ersten,

aus der Einheit angenommenen erzeugten Producte, aus einem auf gleiche Weise erhalten vorstehenden Producte wiederum ansiehet, — heißt eine Größe graduiren, oder, sie zu einer gewissen Dignität erheben. Welcher beiden Ausdrücke ich mich lieber bedienen will, als des bis jetzt gewöhnlichen barbarischen: eine Zahl zur Potenz erheben, bey welcher Benennung, mag solche auch immer soviel als Potestät, — Potestas oder Potentia ausdrücken sollen, ich mir nie einen deutlichen Begriff habe machen können. Eben so wollen wir lieber die Größe, von welcher eine dergleichen Gradation anhebt, und nach deren Gesetz sie immer stetig in ihren aus ihr entstandenen Producten wächst, die Basis der Gradation, oder vielleicht noch richtiger, eine Urgröße, nemlich von einer Gradation, d. i. eine Größe, welche den Ursprung einer andern aus ihr (nach a) hervorgehenden, oder hervorgegangenen enthält, als die Wurzel der Dignität, oder Potenz nennen; denn als Kind habe ich mir hierunter immer Baumwurzeln vorgestellt. Will man eine Zahl graduiren, so muß man dabey die Zahl anmerken, wie oftmal solches geschehen soll, oder, auf den wievielsten Grad sie gebracht werden soll, und diese heißt hier der Exponent der Gradation, oder der Logarithmus, d. i. die Zahl, welche das malige Verhalten einer graduirten Zahl gegen ihre Basis angiebt. Denn der Logarithmus, von αριθμος λογων, (die Zahl der Verhältnisse) giebt die Summe, oder Menge der gleichen Verhältnisse an, wie vielmal 1 ∴

a in 1 ⁘ a^n enthalten sey. So heißt der Ausdruck a^8, daß die Größe a hier nicht in ihrem eigenthümlichen Wievielen, sondern gleich einem andern Wievielen angesehen werden soll, das da gleich ist einem summarischen, oder endlichem Product, wenn man a selbst als ein aus der Einheit einmal entstandenes Product ansiehet, dann als ein zweites das nothwendig = aa, ferner als ein drittes aus aa wiederum mit dem als Basis angenommenen Progressionsgesetz a multiplizirtes, und so immer fort als eine stetige Progression von 8 Produkten, wo immer jedes folgende wiederum ein Product aus seinem vorherstehenden und der hier zum Progressionsgesetz angenommenen Basis a. Also, wo immer jedes folgende stetig um so viel mal größer ist, als die Einheit der Basis anzeigt, denn sein ihm zunächst vorstehendes. Also a^n ist der allgemeine Ausdruck einer Größe, die man als ein ntes Product aus n Producten ansiehet, deren erstes Glied = 1 . a, und wovon jede nächstfolgende Größe bis zur nten immer ein Product wiederum aus der, in Natur eines Products ihr nächst vorstehenden Größe mit dem nemlichen Multiplicator a, in einer stetigen Progression ist. Die Größe, die man nun erhält, wenn man würklich die Modification vornimmt, die durch den ideellen Ausdruck a^n angedeutet worden, heißt die nte Gradation von a, und giebt nun, wie jedes Product (53. b), von dessen Wesen sie erscheint, eine würkliche Größe, da hingegen a^n nur einen Verhältnißausdruck bezeichnet.

β) Eine Gradation ist sonach der summarische Ausdruck einer, nach einem gewissen stetigen Progressionsgesetz malig vermehrten Größe.

Wir sehen uns so durch die Natur der Sache gezwungen, auch hier unsern l. d. R. S. 321, zu Folge aller bis jetzt existirenden mathematischen Kompendien, gegebenen Begriff von der gewöhnlich so genannten Potenz, und Potenzerhebung zu verlassen, indem solcher an sich nicht nur schwankend und unbestimmt erscheint, sondern, wenn man damit dessen Erläuterung l. d. R. S. 323 (welche die aller mathematischen Kompendien ist) vergleichet, auch würklich sich als falsch erweiset. Denn obgleich der algebraische Ausdruck, daß z. B. $a^3 = a \cdot a \cdot a$ (od. $= aaa$) seine Richtigkeit hat, weil die Algebra, gleichgültig für Producte, nur deren sie gebende Faktoren angiebt; so muß man doch bedenken, daß alsdann alle dem letztern Faktor vorstehende Faktoren in dergleichen Ausdrücken, nicht mehr simple Faktoren, sondern schon Producte aus solchen bezeichnen sollen: und es ist daher offenbar die Erklärung falsch, wenn man (wie l. l.) sagt: daß a^n so viel heisse, als, daß a mit sich selbst nmal multiplizirt werden solle. Dieses giebt wohl eher, den Ausdruck gehörig modificirt, ein endliches Product, entstanden aus einer xmalig fortgesetzten Setzung immer mit sich selbst multiplicirter Producte, von einer zur Basis angenommenen mit sich selbst multiplicirten Größe a; daß wenn man $a = 2$ setzte, die Reihe wä-

re 2, 4, 16, 256....; also ein anderes, bis jetzt in den mathematischen Kompendien fast noch gar nicht berührtes (ausser daß ich solches nur bey Bursa erwähnt finde) arithmetisches Verfahren, und welches ich, weil ich für solches noch nirgends einen Namen gefunden, seinem Wesen gemäß die Saltation und Desaltation benennen will, und wovon am Ende dieses Abschnittes weiter erwähnt werden soll; mit nichten aber drückt sie das aus, was eigentlich das Wesen der Gradation und Degradation heischet. Oder, es müßte nach dieser Erklärung seyn $a^n = aa + aa + aa$....., welches letztere aber eben so wenig als ersteres dem Wesen der Gradation entspricht.

Es ist also auch falsch, wenn man den bisherigen mathematischen Kompendien zu Folge saget, wie L. d. R. S. 322: daß von der Menge der gleichen Faktoren die Gradationen (Potenzen) ihre Benennungen erhielten; indem ja nach dem bisher gezeigten, keine Gradation möglich ist, die mehr als zween gleiche Faktoren in ihrem dargestellten Produkte enthalten könne; sondern sie erhalten ihre Benennung von der, nach Anzeige des Exponenten, malig angewandten Basis zur Erzeugung eines endlichen Produkts aus Produkten mit ihr, als dem einen Faktor, das in sich das nte Glied einer Progression von dieser Basis darstellt.

γ) Progressionen und Gradationen unterscheiden sich demnach nur in dem Ausdruck der Angabe ihrer in sich begreifenden Glieder: daß nemlich, wenn man alle diese Glieder, durch welche eine Größe nach einem bestimmten Gesetz gleichmalig stetig wächst, angiebt, solches eine Progression heisset; — und eine Gradation, (Potenz) wenn man für die Angabe aller dieser einzelnen Glieder nur den summarischen Ausdruck setzet, den solche in ihrem nten Gliede giebt, indem man dabey die Menge der so in ihr enthaltenen Stufungen, durch die sie gegangen, durch den Exponenten, oder Logarithmus der Gradation bemerket.

δ) Daher folgt denn, weil (nach S. 70. b, c) die 1 überhaupt keine Verhältnißgröße giebt, sie also auch eben so wenig eine Gradation, noch Degradation bilden kann; sondern, so wie $1 . 1 = 1$, und auch $1 : 1 = 1$ ist, sie sonach in allen möglichen Stufungen und Abstufungen immer ungeändert bleiben muß, oder, sie für alle mögliche Stufungen und Abstufungen nur immer $= 1$ geben kann.

ε) Weiter folgt aus γ: Weil (nach S. 70. b, ε) die 1 keine Verhältnißgröße giebt, und daher in jeder Progression erst der Exponent, oder das zweite Glied, die erste Verhältnißgröße ist; so heißt es von diesem demnach auch, daß er in der ersten Gradation stehe, und daß in einer als Progression gesetzten Gradation, wo also die Basis den Exponenten giebt, alle Zahlen,

die weniger als er, — oder, weniger als die für eine Gradation angenommene Basis, in dieser Vergleichung keinen Grad haben, d. i. = a° sind.

NB. Inwiefern nun jede Zahl ein Vielfaches, entstanden aus der, ihrer Benennung entsprechenden maligen Setzung der Einheit (60. g), ausdrückt, und selbst die hypothetische Einheit (6 u. 17.) als ein dergleichen sich charakterisirt; so giebt sonach jede Zahl an sich genommen, eine Größe vom ersten Grade; welches auch sogar von der 1 gelten muß, weil sie, verglichen mit sich selbst, immer ein malig erzeugtes aus sich selbst ist (∂).

b) In der Natur wie die Dimension der Multiplication, fallende Verhältnisse, Proportionen und Progressionen den steigenden entgegengesetzt sind, und eben ihren Grund in den Größenmodificationen haben, von welchen sie sich als Entgegensetzungen charakterisiren; in eben dieser Natur steht der Gradation die Degradation entgegen: — als der summarische Ausdruck einer, nach einem gewissen stetigen Progressionsgesetz malig verminderten Größe, — und es muß also bey ihnen alles von der Beschaffenheit seyn, wie es bey abnehmenden Progressionen (70), weil dieses, wie wir eben erwiesen, der Fall bey Gradationen ist.

α) Man bezeichnet eine Degradation, indem man ihr umgekehrt von (a, α d. S.) den Exponenten,

oder Logarithmus der Gradation, mit dem Zeichen γ, als welches soviel als Basis, — Urgröße — (l. d. R. S. 325) andeuten soll, vorsetzet, und $\overset{n}{\gamma}a$ ist der allgemeine, eine Degradation bezeichnende Ausdruck.

β) Der Ausdruck $\overset{n}{\gamma}a$ bezeichnet demnach im Gegentheil von a^n, daß man hier a als eine graduirte Größe vom Grade n zu betrachten, und nun (entsprechend a, α u. β) die Zahl a nicht in der Eigenthümlichkeit desjenigen Wievielen anzunehmen habe, aus dem sie, als aus ihrer Basis, — aus ihrer Urgröße (a, α), als ein summarisches ntes Produkt aus lauter sich stetig in einer Progression folgenden Produkten immer mit derselben Basis multiplizirt, entstanden ist, daß man also hier a als ein dergleichen Produkt dimetiiren, und zwar in seine nmal gesetzte es gegeben habende Faktoren zerlegen, und die nte Mensur seiner, als denjenigen Faktor in ihm, mit dem die in ihm enthaltene Progressionsglieder immer gleich stetig bis zu ihm vermehrt wurden, angeben soll. Denn dies will auch hier der vorstehende, den Grad der Degradation anzeigende Exponent andeuten, nicht aber etwa, wie es den mathematischen Kompendien zu Folge, l. d. R. S. 324 gesagt ist: daß solcher durch seine Einheiten anzeige, in wieviel gleiche Faktoren diese Größe zerlegt werden solle.

γ) Hat man a^n würklich nach der Form einer Progression (laut a, α d. S.) gebildet, so muß sie sich auch genau durch die nmalige Setzung ihrer Basis, wie jede Progression (70. b, ε) messen lassen, d. i. a^n sich zu $\sqrt[n]{}a$ rationell verhalten, und es muß sich also $\sqrt[n]{}a$ genau angeben lassen. Ist dieses aber nicht der Fall, so besteht auch (nach S. 23.) die Möglichkeit, daß a^n zu $\sqrt[n]{}a$ irrationell seyn kann; in welchem Fall sich denn $\sqrt[n]{}a$ (nach S. 24. b, c) wohl nächst möglich, nie aber ganz genau finden läßt, und a^n heißt in diesem Falle eine irrationelle, oder surde Größe (S. 22. b) vom Grade n.

Nothwendig giebt nun $\sqrt[n]{}a$, in der Natur einer Mensur von a^n eine eigenthümliche Größe. (a, α d.S.)

c) Die Gradation und Degradation, als verhältnißmäßige Vermehrung, oder Verminderung betrachtet, hat also Aehnlichkeit des Wesens mit der Multiplication und Dimension einer Größe, und steht Rücksichts dieses, mit diesen Größenmodificationen unter einem Geschlechte; doch unterscheidet sie sich als eine eigene Art von solchen, durch die eigene wesentliche Form ihrer Bildung (a, α u. β), welche ihren specifischen Unterschied als einer besondern Art von verhältnißmäßig vermehrten, oder verminderten Größen geben. Daß man aber diesen specifischen Unterschied

nicht gehörig berücksichtigt hat, und nach der (l. l.) gerügten falschen Vorstellung, die man sich bisher von ihrer Entstehung, und ihrem Begriff bildete, ist es geschehen, daß man irrig schloß: daß, so wie eine Größe malig nach Maasgabe einer ihr beygesetzten andern vermehrt, oder vermindert werden könne, sie es auch so nmalig mit sich selbst werden könne, und daß dieses die Gradation und Degradation gäbe (72, α, β). Aus diesen irrigen Vorstellungen ist es gekommen, daß man Gradationen und Degradationen auf S. 59, c ohne weitere gehörige Beschränkung gebauet, und ganz falsch diese Lehre zeither in den mathematischen Lehrbüchern unmittelbar gleich nach der Dimension (Division), und also noch vor den Progressionen, und was noch schlimmer, beide zusammen noch vor dem Verhältnißbegriff unmittelbar nach der Addition und Subtraction aufgestellt hat, da sie doch unmittelbar, wie wir (unter a u. b d. S.) erwiesen, sich nicht aus jenen Modificationen, sondern aus den Progressionen ableiten; daher sie denn auch systematisch, nicht anders als unmittelbar nach diesen und mit diesen verbunden vorgetragen werden können.

d) Gradationen und Degradationen haben ihre Benennung nach der Anzeige ihres Exponenten u. s. f. S. 72. a, β. Doch heißen besonders nach l. d. R. S. 330 u. 331 nie Ausdrücke a^2 eine Quadrat- und a^3 eine Kubik-Zahl; und nur von der Quadrat-Zahl kann, wie wir (a, u. a, α u. β d. S.) gesehen,

die bisherige Definition von der Gradation gelten, daß man sagt: eine Zahl quadriren ist, solche mit sich selbst multipliciren. Falsch aber ist es, wenn man sagt: solche zweymal mit sich multipliciren; denn es geschieht ja im Grunde nur einmal, und kann auch (nach l. l.) nur einmal möglich seyn, daß eine Zahl mit sich multiplicirt werden kann. Beym Kubus findet also diese Vorstellung und Definition (nach l. l.) schon nicht mehr statt. Quadrate geben sonach wiederum eine eigene Art von Gradationen und Degradationen.

NB. Da nun jede Größe (27) nothwendig selbst gleich seyn muß; so fließt hieraus, und aus dem Begriff einer Quadratzahl: daß (+ a) × (— a) = — aa, nicht aber = — a^2 seyn kann: d. i. wohl ein Product von + a in — a (in der Natur nach 69 Zus.) nicht aber ein Quadrat weder von + a noch von — a ist. — Verhält es sich aber so mit (+ a) × (— a); so müssen die nemlichen Schlüsse für alle höhere Gradationen gelten.

Wie man nun jede Zahl zu einer bestimmten Gradation erheben, oder als eine graduirte von einem bestimmten Grade ansehen, und auf ihre Basis degradiren kann; so kann man auch (entsprechend 65, d) Verhältnisse graduiren und degradiren: wo denn nach Herrn Hindenburgs Bezeichnung die Ausdrücke $(a \dot{\times} b)^m$ eine Gradation von Grade m, und $(a \dot{\times} b)^{\frac{1}{m}}$ eine Degradation vom mten Grade anzeigt.

f) Wenn erwiesen (S. 60. g), der Bruch der allgemeine Ausdruck für jedes Wieviele ist, und mit Brüchen daher (S. 60, i) sich alle Modificationen, wie mit ganzen Zahlen vornehmen lassen; so müssen sie sich eben auch so gut als ganze Zahlen, wie Gradationen und Degradationen setzen lassen. Da aber der Bruch, seinem Wesen zu Folge (60, e u. f), als ein Quotient, im Verhältniß des Theils (Zählers) zu seinem Ganzen (dem Nenner) zu betrachten ist; so siehet man leicht ein, daß man, um dieses Verhältniß nicht aufzuheben, nothwendig beide, sowohl Zähler als Nenner als eine komplexe Größe ansehen, und so beide gradüiren, oder degradiren müsse, so wie vorher bey Verhältnissen unter e der Ausdruck $(a : b)^m$ anzeigte. Also:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a_n}{b^n}, \text{ und } \sqrt[n]{r}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\sqrt[n]{r}a}{\sqrt[n]{r}b}.$$

Wie nun aber so hier der Nenner immer in einer nach dem Gradationsgesetz malig vergrößerten Zahl erscheint, als er vor dieser Modification schon größer als sein Zähler war, und nach S. 60, b, NB. der positive Werth eines Bruches um desto kleiner wird, je größer die Zahl seines Nenners wird; so muß also auch nach diesem, und dem daher geleiteten Multiplicationsgesetz für Product von Brüchen mit Brüchen (60, i, β) $\left(\frac{a}{b}\right)^n \prec \frac{a}{b}$, und jedes $\left(\frac{a}{b}\right)^n \prec \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}$

seyn; so wie dagegen wiederum in gleicher Natur $\sqrt[n]{r}\left(\frac{a}{b}\right) \perp \left(\frac{a}{b}\right)^n$ seyn muß. Man vergl. L. d. R. S. 327. 328. 342 • 357.

NB. Hier ist der Ort, wo wir für die S. 69 aufgestellte multiplicirte oder vervielfältigte Verhältnisse noch anmerken müssen.

Wenn von jedem zusammengesetzten Verhältniß überhaupt (nach S. 65, b) der Exponent gleich seyn muß dem Product der mit sich multiplicirten Exponenten der in ihm begriffenen einfachen Bestehungsverhältnisse; so muß also, weil diese Exponenten in einem vervielfachten Verhältniß alle gleich sind, eine und dieselbe Größe sind, daher ein multiplicirtes Verhältniß zu seinem Exponenten haben eine Gradation gleich der Summe der submultiplicirten Verhältnisse, von der Basis derjenigen Größe, welche der Exponent der submultiplicirten Verhältnisse ist. Als wenn in unsern dort S. 69 gegebenen Ex. No. 1:

$$\begin{array}{l|l} a \div b = n & 1 \div 2 = 2 \\ a \div d = n & 3 \div 6 = 2; \text{ so ist} \end{array}$$

von $a \div d = (a \div b) + (c \div d)$

$(3 \div 12 = (1 \div 2) + (3 \div 6)$ der Exponent $= n^2$ $(2^2 = 4)$.

Gleichwie in dem gegebenen Ex. dort No. 2, der Exponent von $a \div n(12 \div 96) = n^3$ (d. i. $= 2^3 = 8$) ist.

Da nun die Zahl der submultiplicirten Verhältnisse, welche ein multiplizirtes unter sich begreifen kann, unendlich ist; so ergiebt sich: daß jedes multiplizirte Verhältniß als ein Product von x submultiplicirten, deren gleicher Exponent $= m$, zu seinem Exponenten haben müsse m^x.

Hat nun ein multiplicirtes Verhältniß zu seinem Exponenten $= n^2$; so nennt man es insbesondere, wie das obige Beyspiel unter No. 1, ein quadratisches Verhältniß; so wie das Beyspiel unter No. 2, dessen Exponent $= n^3$, ein triplizirtes, oder kubisches Verhältniß heißt.

Die darunter begriffene submultiplizirte Verhältnisse heißen, im erstern Fall: subduplizirte, und im andern: subtriplizirte Verhältnisse.

Eben so giebt es denn nun weiter biquadrirte, quintrirte, sextirte u. s. w. Verhältnisse.

Als Resultat ergiebt sich denn, daß wenn wir eine in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückte Progression (70, b. ε; in Vergl. 71, γ. 1), als die unmittelbare Erzeugerin von Gradation, nehmen, daß in solcher allemal, wenn man deren erstes Glied $= 1$, ihr zweites, also den Exponenten $= e$ setzen, solche in ihrer Reihefolge seyn müsse:

$1 \dot{:} e \dot{:} e^2 \dot{:} e^3 \dot{:} e^4 \dot{:} e^5 \dot{:} \ldots\ldots e^m \dot{:} e^{m+1} \dot{:} e^n$;

und daß also auch eine jede Reihe, deren erstes Glied nicht 1, sondern jede Zahl a, wenn man zu ihrem Exponenten $= e$ setzt, der Ausdruck ist von

$a \dot{:} ae \dot{:} ae^2 \dot{:} ae^3 \dot{:} ae^4 \dot{:} ae^5 \ldots\ldots ae^{n-r}$

(S. 70, b, ε).

Diese Beschaffenheit hat es auch mit dem erstern Ausdruck, nur daß da auf das erste Glied $= 1$ (nach l. l.) keine weitere besondere Rücksicht genommen wird, weil $1 \cdot e = e$, und so auch $1 \cdot ae^n = ae^n$ immer bleiben muß.

h) Setzt man daher (so wie unter g) eine Progression in ihren kleinsten Zahlen (70, b. ε) ausgedrückt, daß sie in ihren Gliedern eine Reihe von Gradationen giebt, und schreibt unter diese die Vergleichungsreihe der natürlichen Zahlen, als eine solche in ihrer kleinsten Angabe (71, a. γ) ausgedrückt; so muß letzterer zur erstern die Logarithmen geben, als:

$$a \div e \div e^2 \div e^3 \div e^4 \div \ldots . e^m \div e^{m+1} \div \ldots , e^n$$
$$\text{Log. } 0 \div 1 \div 2 \div 3 \div 4 \div \ldots . m \div m+1 \div \ldots n.$$

i) Entsprechend den Grundgesetzen S. 56, i, müssen also auch seyn:

α) Wenn $a = b$, ebenfalls $a^n = b^n$; und wenn $a \succ b$, ebenfalls $a^n \succ b^n$; und umgekehrt also ist, wenn $a^n = b^n$, auch $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$, und wenn $a^n \succ b^n$, auch $\sqrt[n]{a} \succ \sqrt[n]{b}$.

β) Es geben demnach überhaupt Gradationen von einerley Grad, auch eine größere Zahl für ihre Basis, je nachdem sie selbst eine größere, oder kleinere Zahl ausdrücken; eben so auch umgekehrt die Basis.

NB. Anmerken müssen wir hier endlich noch, daß, wenn (nach a, g u. h d. S.), schon e, als entstanden aus $ae \succ 1$, und nun so weiter jedes e^n immer ein Product aus seinem vorstehenden Gliede multiplicirt mit e, jede graduirte ganze Zahl, die $\succ 1$ (a, δ),

nothwendig größer als ihr Logarithmus seyn muß; so wie umgekehrt dagegen, jede Gradation eines Bruches, eines weniger als 1, (nach S. 60, b. NB.) um so viel mal in ihrem Werthe kleiner seyn muß, als der Logarithmus multiplicirt mit der Basis ausdrückt.

NB. 2. Entsprechend 70, b, α ergiebt sich denn aus g d. S., daß die wesentliche Eigenschaft jeder Progression, daß sie ihren Gliedern, ihr erstes $=$ a, ihren Exponent $=$ m angenommen, gleich sey.

I. II. III. IV. V.

wenn steigend: $a \dot{:} am \dot{:} am^2 \dot{:} am^3 \dot{:} am^4$ u. f.

wenn fallend: $a \dot{:} \frac{a}{m} \dot{:} \frac{a}{m^2} \dot{:} \frac{a}{m^3} \dot{:} \frac{a}{m^4}$ u. f.

Satz 73. In der Natur wie (S. 71) Vergleichungsprogressionen; eben so müssen auch Vergleichungsgradationen und Degradationen bestehen, die ihrem Wesen nach, als malige Producte aus ihrer Basis (Differenz) mit ihrem Zeiger als ihrem Koeffizienten; oder als solche, gemessen wiederum durch ihren Koeffizienten anzusehen sind, und also die arithmetischen Ausdrücke ne, und $\frac{ne}{n}$ geben, und wo auch wiederum, eine darunter geschriebene Reihe natürlicher Zahlen im kleinsten Vergleichungsprogressions-Ausdruck die Koeffizienten darstellen muß.

Diesen Satz habe ich noch in keinem mathematischen Kompendio aufgestellt gefunden. Man redet in der Buchstaben-Rechenkunde soviel von Größen mit bey sich habenden Koeffizienten, ohne auf den Grund ihrer Ableitung verfallen zu seyn, und doch hat unser Satz seine Richtigkeit.

a) Gleichwie die Begriffe **Proportion** und **Progression** (68 u. 71) als allgemeine, und besonders modifizirte gesetzt werden konnten; eben so sehen wir, daß der (S. 72, a, β) aufgestellte Begriff einer **Gradation**, nur den spezifischen Unterschied eines Geschlechts in sich fasse, der dort in dem malig vermehrten liegt. Es kann sonach eine Gradation auch, den summarischen Ausdruck einer, nach einem gewissen stetigen Progressions-Gesetz malig zu sich selbst gesetzten eigenthümlichen Größe bezeichnen: und so giebt es also wirklich auch **Vergleichungsgradationen**, die man nun, weil sie einen Zusammenhang (71, a, β) eigenthümlicher, und nicht verhältnißmäßiger Größen bezeichnen, immer mit diesem Namen benennen muß, um sie von **Verhältnißgradationen**, oder schlechthin genannten Gradationen, von welchen sie, wie der sie gebende Grund, Vergleichungen, Vergleichungsproportionen und Progressionen, wesentlich verschieden sind, aber auch Aehnlichkeit der Wesen haben (71, a), — zu unterscheiden.

b) Denn jede Vergleichungsprogression (nach 71, z, γ, 1) auf eine andere ihr gleiche, in den kleinsten

Zahlen ausgedrückte, reduzirt, deren erstes Glied also = o, das zweite die Differenz e selbst ist, muß so nothwendig das dritte = e+e, d. i. = 2e, das vierte = e+e+e, d. i. = 3e u. s. f. (nach Grund 71, a, γ, 1) das nte Glied = (n — 1) e geben. Heißt nun aber eine Größe e zu sich selbst n mal setzen, (nach 53 u. 54) weiter nichts, als sie n mal vermehren, oder mit n multipliciren; so giebt also jede Vergleichungsprogression in ihrem nten Gliede eine Vergleichungsgradation, als den summarischen Ausdruck ihrer zu sich selbst n mal gesetzten Differenz, solche (entsprechend 72, a, α) hier für ihre Basis, und als eine Zahl vom ersten Grade, nach dem hier festgesetzten, stetigen Vergleichungsgesetz, angenommen, und das erste Glied für eine Zahl vom Grade Null (nach 71, a, γ. 1 u. entsprechend 72, a, ε) betrachtet.

c) Will man sonach eine Vergleichungsgradation ausdrücken, so kann man sie ihrem Wesen, als eine n malige Setzung ihrer Basis, gemäß, nicht anders algebraisch als eine Multiplication anzeigen, und der Ausdruck na, zeigt sonach eine Vergleichungsgradation vom Grade n an, und n heißt hier der Koefficient, oder die bewirkende Größe, daß a, als ein Wievieles nach seiner Eigenthümlichkeit n mal gesetzt zu nehmen ist. Man setzt, algebraisch angenommen, den Koefficienten neben der zu graduirenden Größe, aber immer solcher vor, um dergleichen Größen von simpeln Multiplicationsausdrücken zu unterscheiden.

d) Eine Vergleichungsgradation entsteht also, aus der maligen Setzung ihrer Basis als einer eigenthümlichen Zahl, nach Anzeige der Einheit des ihr beystehenden Koeffizienten, als des zu ihr gegebenen zweeten Factors: und sie hat daher von der Einheit dieses ihr beystehenden Koeffizienten, oder von der maligen Setzung ihrer Basis zu sich selbst ihre Benennung vom ersten, zweeten und nten Vergleichungsgrad.

e) Wie (nach 71, a, γ) die 1 eine Differenz und Vergleichungsprogression giebt; eben so also auch eine Vergleichungsgradation.

f) Wie Verhältnißprogression und Gradation (nach 72, a, γ), eben so unterscheiden sich also auch Vergleichungsprogression und Gradation nur in dem Ausdruck und der Angabe ihrer in sich begreifenden Glieder, daß wenn man solche nur summarisch angiebt, dieser Ausdruck die Vergleichungsgradation heißt.

g) Ist nun jede Vergleichungsprogression die Erzeugerin von der Vergleichungsgradation; so muß denn (aus f d. S.) jede Vergleichungsprogression in ihrer Reihefolge, ihr erstes Glied (nach 71. a, γ, 1) = o, ihre Differenz, oder ihr zweytes Glied = e gesetzt, seyn =

$$o \div e \div 2e \div 3e \div 4e \div 5e \div \ldots . ne;$$

so daß also auch eine jede Vergleichungsprogression,

für deren erstes Glied eine jede Zahl a gesetzt seyn mag, wenn man zu ihrer Differenz = e nimmt, der Ausdruck ist von a ÷ a ✣ e ÷ a ✣ 2e ÷ a ✣ 3e ÷ a ✣ 4e ÷ a ✣ 5e ÷ .....

a ✣ (n — 1) e (nach 71. a, γ, 1)

Welche Beschaffenheit es auch mit dem Ausdruck hat, nur daß da (nach l. l.) auf das erste Glied = o, keine weitere besondere Rücksicht genommen wird, weil o ✣ e = e, und o ✣ ne = ne.

h) Setzet man daher, so wie unter g, eine Vergleichungsprogression, in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt, daß sie in ihren Gliedern eine Reihe von dergleichen Gradationen giebt, und schreibt unter diese wiederum die Vergleichungsreihe der natürlichen Zahlen, als eine solche in ihrer kleinsten Angabe (71. a, γ); so muß letztere zur erstern (nach l. l. γ, 1.) die Koeffizienten geben, als:

o ÷ e ÷ 2e ÷ 3e ÷ 4e ÷ 5e ÷ .... ne

Koeff. o ÷ 1 ÷ 2 ÷ 3 ÷ 4 ÷ 5 ÷ .... n;

Man vergleiche S. 72. g u. h.

i) Da hier in der Vergleichungsprogression jedes folgende Glied, nicht, wie bey Verhältnißprogressionen (70. u. ebend. b, α) ein Produkt mit dem Exponenten und seinem vorhergehenden Glied, sondern nur ein dergleichen mit dem Koeffizienten und der Differenz ist, diese sich also immer gleich bleibt, und ersterer als Faktor gegen den Koeffizienten seines nächst-

vorstehenden Gliedes, nur immer um 1 größer wird; so muß also wohl hier das nte Glied größer, als jedes einzelne der ihm vorstehenden Glieder seyn, nicht aber in der Natur, daß es, (wie S. 70. b, β bey Verhältnißprogressionen), auch größer sey, als die Summe aller ihm vorstehenden zusammen; sondern es muß dies hier just der entgegensetzte Fall seyn, wenn die Vergleichungsprogression mehr als drey Glieder hat.

α) Denn, giebt das erste Glied (nach 71. a, γ, 1) noch gar keine, und das zweite nur die erste Gradation, also, rücksichts ihrer Progressionalgröße (70. b, δ) die Glieder = o ÷ e ÷ 2e; so ist es ja augenscheinlich, daß, so wie o ≺ e, eben so auch o + e ≺ 2e seyn müsse.

β) Wie aber weiter o + e + 2e = 3e, das vierte Glied in einer Vergleichungsprogression in dieser Größenverbindung selbst = 3e; so muß also jedesmal in einer dergleichen das vierte Glied gleich seyn der Summe der ihm drey vorstehenden ersten Glieder.

γ) Ist nun aber das vierte Glied schon gleich der Summe seiner ihm vorstehenden drey ersten Glieder, und wird im fünften Glied der Koeffizient, als zweiter Faktor zu der sich immer gleich bleibenden Basis, hier nur (nach i) um eine Einheit größer; so muß er wohl nothwendig ein größeres, als das ihm nächst vorstehende Glied, oder jedes einzelne, das ihm vor-

stehen mag, zu seinem Produkt aus der Basis geben: aber es muß dieses auch zugleich kleiner, als die Summe aller der ihm vorstehenden Glieder zusammen seyn; denn $0 + e + 2e + 3e = 6e$, aber $6e > 4e$; und so siehet man denn leicht ein, daß jedes folgende höhere Glied als $4e$ in einer Vergleichungsprogression, oder Gradation, von gleichem Verhalten gegen die Summe seiner ihm vorstehenden Gradationen seyn müsse.

k) Dagegen, giebt der summarische Ausdruck einer malig nach einem bestimmten Progressionsgesetz stetig gleichviel verminderten eigenthümlich gesetzten Größe eine **Vergleichungs-Degradation** (75. f), welche, nach dem allgemeinen ihres Begriffes und Wesens (72.), als die Entgegensetzung der Gradation; so muß solche also auch hier in der Bestimmung dieser ihrer Art zu betrachten seyn, und sich also zu dieser in der Natur einer fallenden Vergleichungsprogression zu einer steigenden verhalten. Wenn nun (nach c, d u. g d. S.) jede Vergleichungsgradation vom nten Grade $= ne$ ist; so muß denn auch, wenn man eine Größe als von dieser Qualität gegeben, und nun nicht in ihrer Eigenthümlichkeit genommen, sondern als Basis, aus welcher ne entstanden, betrachtet, solche nothwendig $= \frac{ne}{n}$ für ihre wahre Größe geben; und der Ausdruck $\frac{ne}{n}$ rechtfertigt sich sonach im Gegensatz von l. l. als der allgemeine für jede Verglei-

chungs-Degradation, indem er zugleich deren Wesen und arithmetische Erfindung angiebt.

1) Entsprechend 72. i, nach den Grundgesetzen 56, hat es auch mit Vergleichungsgradationen und Degradationen die nemliche Bewandniß, daß nemlich

α) wenn a = b, ebenfalls na = nb, und wiederum na = nb auch giebt $\frac{na}{n} = \frac{nb}{n}$; und

β) wenn a ≻ b, gleichfalls na ≻ nb; und so auch na ≻ nb desgleichen giebt $\frac{na}{n} \succ \frac{nb}{n}$; so wie auch hier das dort S. 72. i, β gegebene Gesetz bestehen muß.

NB. Entsprechend 71. a, α, ergiebt sich denn aus g d. S. in Rücksicht auf S. 72. i, NB. 2, daß jede Vergleichungsprogression, deren erstes Glied = a, die Differenz = d, ihrer wesentlichen Eigenschaft nach gleich sey:

	I.	II.	III.	IV.
steigend:	a ÷	a + d ÷	a + 2 d ÷	a + 3 d u. f.
fallend:	a ÷	a — d ÷	a — 2 d ÷	a — 3 d u. f.

Satz 74. Jede Gradation, in der man ein bestimmtes Vielfache zur Basis annimmt, giebt das Gesetz für eine Zahlenschrift, in welcher der Logarithmus von der Basis = 1, und der von allen, die weniger als diese Ba-

sis, = o ist; und alle Zahlen von der Basis an, heißen nach diesem Gesetz zusammengesezte, so wie die solcher vorstehende, einfache Zahlen dieses Gesetzes heissen. Unsere Zahlenschrift nach den Dezimations-Gesetzen, ist eine dergleichen Gradation, mit welcher es daher dieselbe Bewandniß haben muß. Negative Größen von der Einheit, nach eben diesen Gesetzen geschrieben, heissen daher Brüche dieser Gesetze, woraus Dezimal-, Duodezimal-, Sexagesimalbrüche u. s. w. entstehen, welche sich darin von ihren entgegengesetzten, den Ausdrücken für positives Wieviele unterscheiden, daß sie, weil sie Minusgrößen bezeichnen, nothwendig gleich mit der Einheit ihrer Art anheben müssen, also in ihrem ersten Glied gleich — 1 zu ihrem Exponenten, oder Logarithmus haben müssen; weil, was weniger als 1 seines Wesens, ohnmöglich ein negatives in der 1 dieses nemlichen Wesens auszudrücken vermag. (70. b, ε und 71. γ 1).

Sollen wir mit unsern endlichen Begriffen die Unendlichkeit der Zahlen, als der Ausdrücke für Größe, verfolgen und bestimmen; so müssen wir nach dieser Endlichkeit unserer Begriffe, in der Unendlichkeit gleichsam selbst gewisse Ruhepunkte annehmen, die uns Gesetze für die Benennung und Bestimmung ei-

nes hypothetischen Wievielen werden, das wir als ein solches (7. f) in und von der Unendlichkeit gleichsam selbst, nach diesen angenommenen, und in die Unendlichkeit übergetragenen Gesetzen, beschränkt und abgegränzt haben, und nun, theils nach der blos maligen Benennung der Menge der schlichten Setzung dieses Gesetzes, mit einem beygesetzten Koeffizienten, theils nach der maligen Benennung der Setzung dieses Gesetzes, nach Anzeige eines gewissen Logarithmen, in seinen Produkten aus sich selbst, bestimmen: und so hat uns denn die Natur die Gradation, nemlich die Verhältnißgradition, verbunden mit der Vergleichungsgradation zugleich, als dieses Gesetz für die Benennung hypothetischer Größe vorgeschrieben, und alle Zahlenschrift muß ein dergleichen Gesetz zum Grunde haben, weil wir für die Unendlichkeit selbst keinen Begriff haben können, und wir uns nur nach endlichen, beschränkt angenommenen Punkten eine, obgleich immer sie nie umfassende, sich ihr nur nähernde Idee von solcher bilden können.

b) Wenn nun gleich aber ein solches anzunehmendes Gradationsgesetz für Größenbenennung und Zahlenschrift sich als nothwendig erweiset; so sehen wir doch (aus a d. S.) daß die Bestimmung solches willkührlich ist, wie wir dieses schon S. 12. c gezeiget haben. Man kann zu diesem Gesetz jede willkührliche Größe x annehmen, und man hat so eine allgemeine Form unzähliger Zahlensysteme. Nähme man $x = 2$, so

gäbe solches die Diatik; x = 4, die Tetraktik; x = 10, die Dekadik, oder das Dezimalsystem; x = 12, das Duodezimalsystem; x = 60, das Sexagesimalsystem u. s. w. (man vergl. S. 12. c); und es kann also x, als angenommene Basis für ein dergleichen System, jede mögliche Größe bezeichnen.

c) Setzt man x als Basis für irgend ein Zahlensystem; so ist also nach dieser seiner festgesetzten Annahme (zu Folge 72. a, ε) x eine Größe vom ersten Grade dieses Gesetzes, und hat also zu ihrem Logarithmus = 1; woher denn folgt, daß in diesem angenommenen System, dessen Basis = x, jeder Größenausdruck, der weniger als x (nach l. l.), zu seinem Logarithmus = 0 haben muß, und wenn also (nach l. l.) $x = x^1$, so ist dagegen in diesem Verhältniß jede Größe y (die = x — n) = y^0.

d) Hieraus entstehen einfache und zusammengesetzte Zahlen. Denn muß so nothwendig x = 1 . x seyn; so charakterisirt sich x also hier als ein Produkt, und als solches (nach 54. a) also als eine komplexe Größe, zusammengesetzt aus den sie gebenden Faktoren; und jede Größe y (= x — n) heißt daher in dieser Vergleichung eine einfache, und dagegen v ⩤ x heißt so wie x selbst eine zusammengesetzte Größe, für deren Ausdruck also auch eine zusammengesetzte Ziffer (S. 12. c) stehen muß. Ist nun x = 1 . x, also aus zween Zahlen zusammengesetzt,

so muß es für den Ausdruck seines Wievielen also auch nothwendig eine zweyziffrige Zahl geben, u. s. f. muß denn also, gemäß dem Entstehungsgesetz 72. g u. h in diesem angenommenen System, jede Größe x^n für ihren Ausdruck eine sovielziffrige Zahl geben, als n durch seine Einheit anzeiget + 1; also x^n giebt = n + 1 Ziffern für den Ausdruck seiner Größe, oder seiner Zahl. — Wie denn nun so hier erwiesen, daß x als die Basis von jedem möglichen Zahlensystem angenommen, jedesmal nothwendig eine zweyziffrige, und jede Größe, die nach solchem System = x — n, nur einen einziffrigen Ausdruck für ihre Zahl geben kann; so mag denn auch die gewöhnliche Erklärung von einfachen und zusammengesetzten Zahlen bestehen, welche wir ihrer leichtern Faßlichkeit wegen l. d. R. pag. 5 unserm dortigen Zwecke gemäß gegeben haben.

e) Nach S. 70. b, ε u. 71. γ, 1 kann aber die 1 nie die Basis irgend eines Zahlensystems seyn: in allen möglichen Zahlensystemen giebt sie daher immer nur ein einfaches, und hat also auch stets o zu ihrem Logarithmus.

f) Das Hauptgesetz für jede mögliche Zahlenschrift ist, wie wir bisher (von b an) gesehen haben, die Verhältnißgradation einer für eine solche als Basis angenommene Größe x, mit welcher aber noch als Hülfs- und Nebengesetz für die Bestimmung der zwischen x^1 u. x^2 u. x^3 u. s. f. fallenden Größen, bis x^1

wiederum so viele Einheiten seiner Art giebt, daß es $= x^2$ wird, die Vergleichungsgradation (73) verbunden ist, in der Natur, wie wir solches schon vorher (unter a d. S.) bestimmt und erhärtet haben: — und so unterscheiden sich denn alle nach einem dergleichen nothwendig anzunehmenden Gesetz geschriebene Zahlen in reine, oder gemischte Gradationen ihrer Basis x, je nachdem sie sich als reine Gradationen von der angenommenen Basis x, $= x^n$ charakterisiren, oder als solche noch mit einer andern in Vergleichungsgradation stehenden, wie der Ausdruck ax^n, verbunden sind.

g) Unser dekadisches, oder Dezimalsystem macht von der Basis $= 10$ für x gesetzt seine Gradationen bis zum fünften Grade, (also nach d jedesmal bis zu einer sechsziffrigen Zahl), und jede Zahl $n < 10$, ist also in diesem ein schlichter Einer, dessen Logarithmus $= 0$. Jede Gradation hat dann ferner hier ihre eigene Benennung, welche, nach der angenommenen Schreibeform von der Rechten gegen die Linke, in solcher geben

x^5 Hunderttausend
x^4 Zehntausend
x^3 Tausender
x^2 Hundert.
x^1 Zehner
1^0 Einer

Angenommen macht hier x^5 (also jede sechsziffrige Zahl), wiederum im Zählen einen großen Ruhepunkt, und heißt eine Zahlenordnung, die man denn

num weiter als eine komplexe Größe, und als solche selbst wiederum als die Basis einer weitern Gradation für die Erhaltung einer neuen Zahlenordnung, nach den Gradationsgesetzen (72.), ins unendliche fort annimmt, und die so erhaltenen neuen Gradationen aus Gradationen mit den Namen von Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen u. s. w. benennet; wo denn, entsprechend der Basis x^5, als dem einen Faktor, jede Ordnung auch nie mehr als sechs Ziffern für ihre Zahl, für sich wiederum, in der Folge wie x^5 die Basis entstanden, haben kann. Man kann sonach die Zahlenreihe bis x^5 die niedere, und die aus x^5 wiederum entstandenen Gradationen die höhern Zahlenordnungen nennen. Millionen, Billionen u. s. w. sind also Zahlen höherer Ordnungen.

h) Wie in jeder Gradation (nach 70. b, β), solche als eine Progression betrachtet, eine jede Zahl vom höhern Grade größer ist, als die Summe aller ihr vorstehenden Zahlen von den niedern Graden; so bedeutet also auch hier jede Ziffer, je weiter solche zur Linken, eine Zahl, die größer als die Summe der ihr von der Rechten ab vorstehenden, denn sie bezeichnet eine Größe des Grades von der Menge der ihr so vorstehenden Ziffereinheiten.

i) Zu Folge f, g u. h geben also folgende Zahlen von der niedern Ordnung, als der Basis für jede höhere Ordnung wiederum, diese allgemeine Formen:

$= 1x^{1\,0} + 0^{\circ}$ oder $= 1x^{1\,5} + 5^{\circ}$ auch $= 1x^{1} + n^{\circ}$;
und es ist

$= 9x^{5\,6\,4\,3\,7\,8} + 6x^{4} + 4x^{3} + 3x^{2} + 7x^{1} + 8^{\circ}$.

Alle Zahlen von 10 bis 100 sind also $= nx^{1}$; von 100 bis 1000 $= nx^{2}$ u. s. w. zu Folge f d. S. Man vergl. bis hieher l. d. R. pag. 4 bis 10.

Wir kommen nun zum zweeten Theil unsers Satzes: daß negative Größen von der Einheit nach eben einem dergleichen angenommenen Zahlengesetz geschrieben, und in dieser Natur, als ein mangelndes an der Einheit, den positiven Größenausdrücken entgegengesetzt, Brüche dieses Gesetzes heissen, wo denn, je nachdem wir das Dezimal- Duodezimal- oder Sexagesimal- u. s. w. Gesetz für irgend eine Größenbenennung angenommen, auch dergleichen Brüche entstehen, von welchen wir uns hier denn nur bey den ersten, als den uns interessantesten aufhalten wollen, da bey den übrigen alles von gleicher Beschaffenheit seyn muß, weil x jede mögliche Größe bezeichnet.

k) Jeder Bruch drückt ein negatives von der Einheit aus (60. b, NB.), und steht also dieser in der Natur eines negativen Größenausdruckes, als einer positiven Größe entgegengesetzt; woher denn auch, wenn wir ein dergleichen Wievieles nach dem Dezimalgesetz ausdrücken, sich bey dergleichen Größenaus-

drücken alles den nach diesem Gesetz geschriebenen positiven Zahlen entgegengesetzt verhalten muß.

1) Wenn in dem gemeinen Bruch (S. 60.) der Renner, als der Ausdruck für die in ihre sie gebende Theile zerlegte hypothetische Einheit, jede mögliche Zahl seyn kann; so unterscheidet sich von jenem hierin der Dezimalbruch: daß solche hier nach einer Gradation der Basis = 10 immer als in ihre Bestandtheile zerlegt, angenommen, und nach diesem Gesetz, im Wesen eines Bruches (k), als eine negative Gradation, im Gegensatz ganzer Zahlen, angesehen wird. Wie also ganze Zahlen von der Rechten ab gegen die Linke (g) ihren Werth haben, und geschrieben werden; so schreibt man dagegen, als in dem entgegengesetzten, Dezimalbrüche, und bestimmt deren höhern und niedern Werth von der Linken ab gegen die Rechte. Erscheint eine ganze Zahl als eine gemischte, mit einem bey sich habenden Dezimalbruch, so unterscheidet man sie gewöhnlich von solchem durch ein dazwischen gesetztes Komma, oder, wie in den Logarithmentafeln durch einen dazwischen stehenden Punkt; weil aber ersteres leicht verführen kann, dergleichen Ausdrücke für Tausender, oder Millionen von ganzen Zahlen zu lesen, oder sie mit Multiplicationsausdrücken zu verwechseln; so dünkt es uns besser, uns statt des Komma oder Punktes lieber eines Semikolons (;) zu bedienen.

m) Ist aber der Dezimalbruch eine Minusgradation von der Basis = 10; so muß hier nach Grund unsers Satzes die Basis 10 nothwendig sogleich — 1 zu ihrem Exponenten, oder Logarithmus für das erste Glied ihrer zu durchlaufenden Progression haben. Ausser welchem im Satz angeführten Grunde sich die Sache ihrem Wesen nach auch noch also vorzustellen ist: daß nemlich hier das erste Glied = 1, dessen Logarithmus = 0, von dieser Gradation der 10, als einer negativen Größe von der Einheit, in dieser positiven Einheit liege, der sie in der negativen Eigenschaft entgegengesetzt ist, und daß also auch auf diese Weise die Sache ihre Richtigkeit hat, und daß also wenn man ganze Zahlen mit Dezimalbrüchen zugleich setzt, daß solche sind, z. E. 532; 6417 =

$5^{*2}\ 3^{*1}\ 2^{*0}$; $6^{-1}\ 4^{-2}\ 1^{-3}\ 7^{-4}$ die Sache sich so vorzustellen ist, daß hier die in der Gradation als erstes Progressionalglied stehende einfache positive Größe; deren Logarithmus so in diesem Systeme = 0, wie ein mittleres Proportionalglied zwischen beiden sich entgegengesetzten, von dem Einfachen mit dem Logarithmus 0 anhebenden Gradationen, anzusehen sey, und daß so, nach dem nemlichen Gradationsgesetz, es zu seinen von ihm ausgehenden Gradationen, für seine nächste positive Größe eine Zahl = x^{*1}, so wie für die negative von seiner Einheit = x^{-1} geben müsse. Daher denn auch, daß man Dezimalbrüche ohne bey sich habende Ganze zu Anfange von der Linken, wie z. B. 0;643..... mit Null markirt, und

das erste Glied ihrer Progression für ihre Gradation, als durch seinen dazugehörigen Logarithmus = o, zu bezeichnen.

NB. Diese, einen Dezimalbruch markirend vorstehende Null, mit nach sich habenden Semikolon, möge dessen Charakteristik heissen.

n) Nach k, und wie die eben hier unter m aufgestellte Form des Ausdrucks von Dezimalbrüchen giebt, muß denn hier, im Gegensatz von h, jede Zahl im Dezimalbruch von einer soviel größern Benennung erscheinen, je weiter solche von der Linken ab, gegen die Rechte zu stehet; umgekehrt dagegen aber auch muß sie (nach 60, b, NB.) von einem desto kleinern Werthe seyn, in einer je größern Zahl sie erscheint, x^{-n} drückt eine geringere Größe aus, als x^{-1}, und es ist jedes $x^{-n*1} \prec x^{-n}$.

p) Nach m giebt (zu Folge c) der Nenner eines Dezimalbruches, sogleich in seiner ersten Zahl, eine zusammengesetzte, und der Zähler dagegen seinem Wesen nach nothwendig kleiner, muß also eine einfache Zahl seyn; so daß also jeder Dezimalbruch in seinem Nenner eine Zahl mehr, als in seinem Zähler haben muß, welche, nach dem Gesetz der Multiplication einer Zahl durch 10, 100 u. f. (S. 53. k) die Zahl 1 ist; und demnach jeder Dezimalbruch in seinem Nenner gleichviele Nullen, als Ziffern in seinem Zähler,

mit einer solchen vorstehenden 1 hat. Daher denn auch, weil auf diese Weise der Nenner eines Dezimalbruches leicht zu finden ist, man dergleichen Brüche gewöhnlich nur (wie unter m) durch ihren Zähler angiebt.

q) Hat es in Dezimalbrüchen, als in einer negativen Gradation der 10 (m), die Bewandniß unter n d. S.; so ist (nach 28. c) in ihnen selbst, jede Größe x^{-n}, als ein Ganzes seiner Benennung, und x^{-n+1} wiederum, als ein Dezimalbruch von solchem weiter zu betrachten. Worauf sich denn, und auf S. 65. c, d die Reduction dergleichen Brüche auf gewisse bestimmte Benennungen gründet.

r) Das Resultat der Sätze von k bis q giebt uns die Definition eines Dezimalbruches als eines solchen: dessen Nenner eine Minusgradation der Zehne ist, des Grades, als die Menge der Einheiten von Ziffern für seine Zahl ausdrückt.

s) Nach diesem Begriff von den Dezimalbrüchen ist also alles übrige bey ihnen von gleicher Beschaffenheit wie bey gewöhnlichen Brüchen (S. 60, a, bis h).

t) Erweisen sich ein gemeiner Bruch, oder irgend eine Verbindung von Zahlen, als irrationell (22. b u. c); so wird sich eine dergleichen (nach l. l.) nie ge-

nau durch einen Dezimalbruch ausdrücken lassen. Da man aber die Gradation der 10, negativ, eben sowohl als positiv ins unendliche fortsetzen kann, und dadurch der negative Werth also auch immer fort (nach n u. q) unendlich geringer werden muß; so erhält man hier unendliche Dezimalbrüche, durch welche man sich, so genau, als nur für irgend eine Absicht erforderlich seyn mag, den wahren Werth jeder irrationellen, oder surden Zahl ihrer Art nähern, und solchen angeben kann, so daß das fehlende immer für Nichts (12. b; 13. d) alsdann anzusehen ist.

Hiermit kann man das Wenige vergleichen, was man im l. d. R. S. 338 über diesen Gegenstand schon erwähnt findet.

Satz 75. Das Entstehungsgesetz (72.) von a^n, giebt nothwendig auch das Erfindungsgesetz, oder die Form zur Erfindung von $\sqrt[n]{a}$; für welche sich denn die sogenannte binomische Form als wesentlich charakterisirt: und zwar muß hier die binomische Form von $\sqrt[2]{a}$ den Grund für die Formen von jedem $\sqrt[n]{a}$ nothwendig in sich fassen. Von welchen Formen es uns hier genug ist, hier nur die für das Quadrat und den Kubus anzuführen, weil nach diesen, durch gleiches fortgesetztes Verfahren nach den Regeln der Buchstabenrechen-

kunde (l. d. R.), sich die Formen für jede gegebene Degradation leicht erfinden lassen, welche jedoch in der Anwendung selten über $\sqrt[4]{a}$ hinausgehen.

a) Wenn sich nach unserm dekadischen Zahlensystem die 10 als die erste und kleinste Gradation, und also auch, (entsprechend 74, d) als die niedrigste zusammengesetzte Zahl characterisirt, aus der alle übrige Gradationen dieses Systems, (nach 72) immer in einer Progressionsfolge, als Producte aus Producten, mit diesem angenommenen Exponenten entstehen, nach S. 53, k aber eine einfache Zahl a mit 10^1 multiplizirt, nothwendig eine zweyziffrige Zahl, $a \times 10^2$ daher (nach 74, d) eine dreyziffrige u. s. f. $a \times 10^n$ eine $n+1$ ziffrige Zahl zu ihrem Product geben muß, also eine Zahl, deren Ziffern Menge gleich der Einheit des Logarithmus der $10+$ der Einheit dieses Systems mit dem andern Factor, so folgt daraus: daß jede einfache Zahl a, nach dem dekadischen Gesetz genommen, immer $aa \prec a \cdot 10^1$ seyn muß, und daß solche also auch zu ihrem Quadrat nie mehr als zwo, möglich auch nur eine Ziffer für ihre Zahl; und also jeder Ausdruck a^n, (a, als eine einfache Zahl dieses Systems) nie mehr als n Ziffern, wohl aber möglich deren weniger, für den Ausdruck seiner Zahl haben kann; und wenn also $\sqrt[n]{a}$ verlangt wird, a aber in Zahlen ausgedrückt, nur aus n, oder weniger Ziffern besteht, so kann im er-

stern Fall $\sqrt[n]{a}$ nur eine einfache, oder gemischte Zahl, im letztern aber nur ein Bruch seyn.

b) Giebt also dagegen bey dem Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, die Größe a in Zahlen ausgedrückt, mehr als n Ziffern für deren Marke; so ist $\sqrt[n]{a}$, aus der a, als aus seiner Basis entstanden, und auf die es wieder reduzirt werden soll, nothwendig selbst eine zusammengesetzte Zahl, zusammengesetzt aus soviel Produkten, stetig als in der Basis a die Einheit, immer zu sich selbst gesetzet, als malig durch n Ziffern die Größe der Zahl a ausgedrückt ist; also selbst wieder eine Gradation des Grades, als die malige Menge — 1 der n Ziffern beträgt, durch welche seine Größe angegeben ist.

c) Daher ist in dem Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, wenn es sich mit a, in Zahlen nach unserm dekadischen Gesetz ausgedrückt, wie vorher unter b verhält, die Größe a jedesmal als eine zweytheilige Zusammensetzung aus den in seiner Basis wiederum enthaltenen Gradationen von der 10, und den einfachen Einern dieses Systems, zu betrachten. Nennt man nun erstere, als eine komplexe Größe genommen, allgemein a, und letztere b; so entspringt also eine jede Gradation aus einer n maligen Produktenreihe von $a \dotplus b \asymp a \dotplus b$, nach der maligen Anzeige des Exponenten der Gradation nemlich, und diese daher sogenannte binomische Form giebt also das wesentliche Gesetz, so wie für die

Bildung von a^n, eben so auch umgekehrt von $\sqrt[n]{a}$, nach dem Grunde 72. b, daß sich Gradationen und Degradationen, wie Multiplicationen und Dimensionen, als entgegengesetzte Größenmodificationen zu einander verhalten.

NB. Mit dem Ausdrucke: $(a + b) \asymp (+ a - b)$ oder $(a - b) \asymp (a - b)$ u. s. verhält es sich nothwendig wie S. 72. d, NB.

d) Denn $\sqrt[n]{a}$, will und kann ja nichts anders, als eine Dimension von der Größe a anzeigen, diese nemlich als ein Produkt von Produkten betrachtet, das immer in einer Progressionsfolge nach einem bestimmten Gesetz, als aus seiner Basis entstanden, und nun diese aus ihr, als den einen sie gegeben habenden Faktor, wie dies der Fall bey der Dimension (S. 61. c) war, erfinden. Kann aber die Größe, die mit einer andern, eine dritte als ihr Produkt gegeben hat, nicht anders, als auf dem Weg rückwärts gefunden werden, auf welchem sie als ein solches, zu einem Dimetiendum gegebenes Produkt entstanden (59. c); so sehen wir leicht, daß hier $\sqrt[n]{a}$ nicht durch eine simple Dimension gefunden zu werden vermag, weil a nicht wie ein schlichtes Produkt (53.), sondern in der in diesem S. angegebenen Natur entstanden ist.

e) Charakterisirt sich daher a^n (nach a d. S.) als eine aus einer einfachen Zahl entstandene Gradation, die, gleich einem Dimetiendum (59, c), gleich einem Produkt ist, das aber hier, nicht etwa wie dort aus der oftmaligen Setzung seines Dimensors, (hier des Exponenten) mit einer andern Zahl entstanden, sondern als ein Produkt aus Produkten von einer bestimmten Basis, in der so oftmaligen Setzung mit dieser, wie der Exponent (als Dimensor hier) anzeigt; so kann man hier nicht gradehin diese Basis von a^n durch eine einfache Dimension a : n finden, sondern man muß hier aus der Gradation aller einfachen Zahlen, selbst auf dem Grade n, diejenige finden, welche entweder a^n genau giebt, oder doch, wenn a^n eine fürde ihres Grades seyn sollte, dessen Größe um etwas kleiner zunächst kommt, und diese so gefundene Zahl nun $= \sqrt[n]{a}$ dem Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ setzen. Zu welches Verfahren Erleichterung man daher die Quadrate und Kubus aller einfachen Zahlen schon in allen mathematischen Lehrbüchern bey der Gradations- (Potenz-) Rechnung tabellarisch angegeben findet.

f) Zeichnet sich dagegen in dem Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, die Größe a (nach b, d. S.) als aus einer zusammengesetzten Zahl in ihrer Basis entsprungen aus, daß sie also (nach c) aus einer komplexen Größe $=$ a + b × a + b malig, nach Anzeige der Einheit ihres Exponenten, entstanden; so ist (nach d) die Form, wie

nach dem binomischen Satz $a \dotplus b \times a \dotplus b$ malig nach Anzeige des Exponenten, und entsprechend dem Wesen und Begriff von Gradation (72.), die Größe a^n entstanden, selbst das Gesetz für die Erfindung von $\sqrt[n]{a}$.

g) Das Binomium selbst aber leitet seinen Grund aus dem oben S. 53. f aufgestellten Gesetz für Multiplication. Nach welchem dort, wenn (entsprechend S. 44.) angenommen eine jede Zahl, die nicht 1, gleich einer Summe ist, die sich als eine solche in alle ihr gleiche Aggreganden zerlegen läßt, diese nun unter sich multiplizirt, nothwendig (nach 56. a) ein summarisches Produkt geben müssen, das dem, aus den mit sich multiplizirten Summen dieser Aggreganden selbst gleich ist.

Daher ergiebt sich denn das Binomium als eine allgemeine Form für die Formirung jeder Gradation und Degradation, auch bey einfachen Zahlen des Dezimalsystems, solche nemlich (nach 53. f) als Summen in zwey Aggreganden zerlegt, und nun diese mit sich multiplizirt. Ja selbst für die Zahl 1, diese nemlich in der Natur einer hypothetischen Einheit (S. 6. u. 17. a) nach S. 12. 13. u. 60. g in zween sie gebende gleichnamige Brüche, als in alle ihre sie gebende Aggreganden zerlegt; — und das (unter e d. S.) angegebene Verfahren für die Erfindung von $\sqrt[n]{a}$,

wenn sich a^n als aus einer einfachen Zahl entsprungen charakterisirt, ist sonach also nur als eine Verkürzung von der Anwendung dieser binomischen Form zu betrachten.

h) Wie nun jedes zusammengesetztere seinen Grund in dem ihm vorstehenden einfachen haben muß, und nach der Entstehung und dem Wesen von Gradationen, jede Gradation vom Grade n ihrem Grund (nach 72. d) in a^2 hat; so muß es sich demnach mit der binomischen Form von $\sqrt[2]{a}$ nothwendig nach unserm Satz verhalten.

i) Wenn nun nach der binomischen Form jedes Quadrat (a^2) in seiner Entstehung ist =

$a + b \times a + b = a^2 + 2ab + b^2$ d. i. = einem Produkt, zusammengesetzt aus dem Quadrat des ersten Theils der Basis, aus dem doppelten Produkt des ersten Theils in dem andern, und aus dem Quadrat des zweeten Theils; so daß also, wenn man in dieser seiner Entstehungsform = $a^2 + 2ab + b^2$, solche als dem einen Faktor zum Dimensor genommen, (nach) d) modo dimetiendi wiederum rückwärts gehet, man zur Mensur nothwendig die Basis (hier $\sqrt[2]{a}$), als den andern Faktor wiederum erhalten muß.

α) Das Verfahren bleibt das nemliche, es mag sich nun in Zahlen unsers Dezimalsystems, a^2 als aus

einer einfachen, oder zusammengesetzten Basis (nach a, b u. c d. S) charakterisiren. Da nemlich jedes zusammengesetzte seinen Grund in dem es gebenden einfachen haben muß; so ist sich also jedes Quadrat, das sich (nach b) als aus einer n ziffrigen Zahl, in seiner Basis, entstanden, charakterisirt, vorzustellen: als ob es eine nfache Zusammensetzung von Quadraten, aus eben soviel einzelnen Zahlen desjenigen Grades, dessen jede nach dem dekadischen Gesetz in der Basis ist. Man theilt es daher, weil nach dem dekadischen Gesetz, die die höhern Gradationen bezeichnende Zahlen, sich nur ergeben aus der Vollständigkeit der vorstehenden niedern Gradationen, also von der Rechten ab, in eben so viele zweyziffrige Klassen, oder einzelne Bestehungsquadrate ab, als es sich (nach l. l.) charakterisirt, daß es soviele Ziffern zu seiner Basiszahl, (nicht in so viele Theile, wie andern mathematischen Lehrbüchern nachgeschrieben, in unserm L. d. R. stehet) — und verfährt nun, weil es im Grunde eine Dimension mit benannten Zahlen ist, nach den Gesetzen für solche (L. d. R. pag. 39—43) von der Linken ab, zuerst mit der ersten Klasse, als dem größten Quadrat in dieser Quadratzusammensetzung aus einzelnen Faktoren zu einem summarischen Quadrat, das als solches (nach 74. h) größer als die Summe aller ihm nachstehenden ist.

β) Dieses erste und höchste Quadrat, aus dem (nach e) also hier, wie aus einer einfachen Zahl ent-

standen, die Basis = a gesucht wird, ist als der erste Theil von a + b, aus dem es entstanden, zu betrachten, und alle ihm nachstehende Klassen, oder Quadrataggreganden, sind in dieser Vergleichung als der zweete Theil von a + b (nach c) zu nehmen; daher kann denn auch in dieser Rücksicht, weil so a^2 schon als der erste Basistheil gefunden, und nur noch der zweete = b^2 zu suchen ist, in dem weitern Verfahren mit den übrigen Klassen, oder Bestehungsquadraten, nicht weiter auf a^2 Rücksicht genommen werden, sondern es sind mit und von der zwoten Klasse an, nur immer bey jeder neuen Klasse, als einem einzelnen Quadrat, die Schlüsse $2ab + b^2$ zu wiederholen.

γ) Nach c faßt aber in der Form a + b, die Größe a alle Gradationen von den in der Basis selbst wiederum bestehenden Gradationen, als eine Summe in sich, und die Größe b nur die Gradation von den Einern der Basis, daher sind, wenn a^2 aus n Klassen besteht, alle auf die höchste nachfolgende, bis auf die letzte Klasse, immer noch als Nebentheile in der Basis von deren ersten Theil a anzusehen, und sonach alle für die Basis gefundene Zahlen, bis man zur letzten Klasse kommt, bey der fortgesetzten Anwendung der Schlüsse $2ab + b^2$, immer nur als eine einzige zusammengesetzte Zahl zu betrachten, die = dem ersten Basis-Theil a ist, und die daher immer in dieser Natur = 2a zum Dimensor für die neue Klasse = $2ab + b^2$

geben muß, um für sie die Mensur zu finden, die mit 2a multiplicirt, und zu ihrem Grad erhoben $= 2ab + b^2$ wiederum zu ihrem Product giebt, oder mit ihrem Dimensor multiplicirt, ihr Dimetiendum wiederum darstellt.

d) In der Natur aber, daß die Degradation eine Dimension ihrer Art ist (d), verhält es sich denn endlich wie in der Dimension mit benannten Zahlen L. d. R. pag. 39 - 43, daß im Verfahren der aus einer höhern Klasse bleibende Rest immer mit zu der neuen Klasse gezogen werden muß, bis man auf die niedrigste Klasse, als dem Quadrat aus den Einern in dieser Quadratzusammensetzung zu einem summarischen Quadrat kommt, wo denn, wenn hier noch ein letzter Rest verbleibt, solcher nothwendig weniger als 1 beträgt, und sich a^2 (oder jedes a^n) als eine Surde ihres Grades erweiset, deren wahren Größe man sich dann durch von der Einheit negative Zahlen in der Basis, d. i. durch Dezimalbrüche (nach 74, t) bis ins Unendliche nähern, obgleich nie völlig gleich kommen kann. Denn, ist die Basis aus einer Zahl, zwischen zwoen um eins unterschiedenen Zahlen x u. $x + 1$ enthalten, d. i. $\lessdot x$ und $\gtrdot x + 1$; so kann es keinen Bruch f geben, der zu x gesetzt, diese Basis genau angäbe, und $\sqrt[n]{a}$ bleibt also in diesem Fall immer irrationell.

k) Weil nun jedes a^n aus $a + b$ in seiner Basis entsteht; so gelten die nemlichen Gesetze und Schlüsse für jede Degradation einer Größe zu einem nten Grade, also

für jeden Ausdruck $\sqrt[n]{a}$, unter zu nehmender Rücksicht nemlich auf das spezifische, das jede Größe vom Grade n, in ihrer binomischen Formirung, nach solcher hat, nach a, b u. c d. S.

l) Der Kubus ist daher in seiner Entstehung $=$ $a+b \times a+b = a^2+2ab+b^2 \times a+b = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

d. i. $=$ einem Produkt, zusammengesetzt aus dem Kubus des ersten Theils, aus einem dreyfachen Produkt vom Quadrat des ersten Theils in dem andern, aus einem dreyfachen Produkt des ersten Theils in das Quadrat des zweeten, und aus dem Kubus des andern Theils.

m) Leicht siehet man denn, wie sich durch ein dergleichen fortgesetztes Verfahren, die Formel für die Erfindung jedes $\sqrt[n]{a}$, als wesentlichen Degradations-Gesetz solcher finden lässet. So findet man z. B. zur Formul für die Erfindung von $\sqrt[4]{a} =$

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Man vergl. L. d. R. den Art. von der Potenzrechnung.

n) Wenn (nach i), nach der binomischen Form entstanden, $a^2 = a^2+2ab+b^2$, also gleich einer dreytheiligten Zahl in seinem zum Quadrate gegebenen Produkte ist: u. eben so (nach l.) $a^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, d. i. in dem für seinem Kubus erhaltenen Produkte, gleich einer viertheiligen Zahl ist; so ergiebt sich hieraus: daß jede Zahl a, nach der bino-

mischen Form zu irgend einem Grade erhoben, in dem für diesen erhaltenen Produkt, sich als eine soviel theilige Zahl ergeben muß, als ihr Exponent die Einheit enthält, deren summarischer Ausdruck mit 1 vermehrt ist, d. i. jedes a^n = einem $n + 1$ theiligen Produkt in seiner binomischen Form. — Auch siehet man aus (i. u. l.), wie sich alle Formeln für jede Gradation, mit Worten ausdrücken lassen.

Satz 76. Was S. 65. d u. 72. e von Verhältnissen bestand, gilt auch von Gradationen und Degradationen, daß sie nicht nur wie jede andere Größe modifizirt, sondern auch selbst wiederum ins unendliche graduirt und degraduirt werden können. Dies giebt in der höhern Arithmetik das arithmetische Verfahren mit Gradationen und Urgrößen, auf welches wiederum das mit Dezimalbrüchen gebauet ist.

A) Wie nach der allgemeinen Arithmetik die Ausdrücke ab und $\frac{a}{b}$, sowohl noch vorzunehmende, durch diese Ausdrücke angezeigte Größenmodificationen, als auch die aus solchen schon erhaltene Resultate, also, sowohl Multiplicationen und Dimensionen, als auch selbst Produkte und Mensuren andeuten, eben so verhält sich auch mit den Ausdrücken a^n und $\sqrt[n]{a}$; daher, wenn von Modificationen mit dergleichen Größenausdrücken die Rede, so stehen solche als Produkte und

Mensuren ihres Wesens, (S. 72. 75. c, d) und geben in dieser Natur die Gesetze für das Modificationsverfahren mit solchen.

α) Daher bezeichnen denn nach den allgemeinen Additions- und Subtractionsgesetzen: $a^3 + b^2 = a^3 + b^2$, wie auch $3a^4 + 2a^4 = 5a^4$ Additionen; und $a^3 - b^3 = a^3 - b^3$, imgleichen $7a^5 - 4a^5 = 3a^5$ Subtractionen mit graduirten Größen.

Nota. Sind die einzelnen Aggreganden selbst wiederum von verschiedenen Gradationen, in der Natur komplexer Größen zusammengesetzt; so stellt man sie in ihrer Verbindung in der natürlichen Ordnung, daß von der Linken ab, immer die höhern den niedern vorstehen (70. b, β 74. i), und nun setzt man denn in den zu summirenden Aggreganden immer gleiche Gradationen, als Gleiches zu Gleichen unter einander.

Ex. $2a^4 + 15a^3 + a^2 - 17a - 10$
$-a^4 - 7a^3 + 27a^2 - 18a - 9$

$= a^4 + 8a^3 + 28a^2 - 35a - 19$

(Wäre hier nun die Urgröße $a = 2$ angenommen, so wäre in benannten Zahlen die Summe $=$
$192 - 89 = + 103$.)

Ex. $ay^m - by^n - cy^4 + dy^3 + h - l$
$\alpha y^m + \beta y^n - \gamma y^4 + \delta y^3 - i + k$

$= (a + \alpha) y^m + (\beta - b) y^n - (c - \gamma) y^4 + (d + \delta) y^3 + h - i - l + k$.

Subtractions-Exempel.

$$5z^4 - 3z^3 - z^2 \ast z - 12$$
$$3z^4 \ast 12z^3 \ast 13z^2 - z - 8$$
$$- \quad - \quad - \quad \ast \quad \ast$$

$$= 2z^4 - 15z^3 - 14z^2 \ast 2z - 4;$$

(Hier $z = 3$ angenommen, so stünde die Rechnung in benannten Zahlen ausgedrückt, also:

$$408 - 102 = \ast 306$$
$$684 - 11 = \ast 673$$
$$-$$

$$= 168 - 535 = - 367)$$

Exempel.

$$\alpha y^m - \beta y^n \ast \gamma y^r - c$$
$$\delta y^m - \varepsilon y^n \ast \zeta y^r - c$$

$$= (\alpha - \delta) y^m \ast (\varepsilon - \beta) y^n \ast (\gamma - \zeta) y^r - 2c.$$

β) Da bey der Multiplication von Gradationen aus einerley Urgröße mit einander, nach dem allgemeinen Wesen der Multiplication verlangt wird, daß in dem zu findenden Produkt, alle Faktoren der in einander multiplizirten Gradationen enthalten seyn müssen; so enthält folglich dasselbe soviel gleiche Faktoren, als die Summe jener Logarithmen ausdrückt, d. h. es ist dasselbe eine Gradation von einerley Urgröße mit den gegebenen Größen des Grades der Summe der Logarithmen seiner beiden es gebenden Faktoren. So ist $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$, und überhaupt $a^m \times a^n = a^{m \ast n}$, und $a^m b^n c^p \times a^q b^r c^s = a^{m \ast q} b^{n \ast r} c^{p \ast s}$; daher ist denn die allgemeine Regel für die Multiplication mit Gradationen

von einerley Urgröße, „daß man blos deren Logarithmen zu summiren habe“ $a^2 \times a^3 = a^5$, und $2b^3 \times 3b^2 = 6b^5$.

NB. Die Beobachtung dieser Regel, giebt also auch das Verfahren, zusammengesetzte Größen, in welchen Gradationen vorkommen, mit einander zu multipliziren, wenn man sie nemlich nach der Vorschrift α, N. in abnehmender, oder steigender Folge nach den Logarithmen der Gradationen ordnet. Ex.

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \times$$
$$x^2 - 2ax + a^2$$

$$= x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^3 + 5a^4x - a^5;$$

γ) In der Natur dagegen, wie überhaupt (S. 59.) ihrem Wesen nach, die Dimension der Multiplication entgegengesetzt ist; und sich also im Dimetiendum so viele Faktoren aufheben, als der Dimensor hat, und für die zu suchende Mensur nur deren so viele stehen bleiben müssen, als das Dimetiendum mehrere hat; so ist demnach auch $\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2 = a^{5-3}$; und überhaupt $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; und daher die allgemeine Regel für die Dimension mit Gradationen von einerley Urgröße (im Gegensatz von β) „daß man lediglich deren Logarithmen zu subtrahiren habe“ so ist $a^4b^5 : ab^3 = a^3b^2$; und $\frac{a^5b^3c^4}{a^4b^2c} = abc^3$ u. s. w.

Der logische Grund von diesem verkürzten Verfahren unter β und γ statt der graduirten Größen selbst, nur mit deren Logarithmen, beruht auf S. 65. a; und S. 70, daß nemlich bey Verhältnissen und Progressionen, also auch bey Gradationen, nur der Exponent oder Logarithmus die eigentliche Größe sey, auf welche man bey dergleichen Größenausdrücken zu sehen habe.

NB. Durch welcher Grundregel Befolgung man denn sonach auch unter Beobachtung (β NB.), mit Gradationen zusammengesetzte Größen dimetiiren kann. So findet man $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$; und $\frac{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4}{a^2 - 2ab + b^2}$ $= a^2 - 2ab + b^2$.

Nota 1. Weil nach der Regel unter γ, $a^m : a^m = a^{m-m}$ $= a^0$ ist, $a^m : a^m$ aber auch $= \frac{a^m}{a^m} = 1$ ist; so ist auch $a^0 = 1$, d. h. jede Gradation deren Exponent Null ist, ist $= 1$.

Nota 2. Wenn daher der Logarithmus des Dimensors größer ist, als der des Dimetiendum; so wird der Logarithmus der Mensur negativ, denn die Größe in der Mensur zeigt alsdann einen Bruch, und als solchen ein negatives von der Einheit an. So ist $a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$; weil aber auch $a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$; so wird mithin $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; und folglich überhaupt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; so daß also eine Gradation, deren Logarithmus negativ ist, immer durch einen Bruch vorgestellt werden kann, dessen Zähler 1, der Nenner aber die nemliche graduirte Größe mit dem positiven Logarithmus ist.

Wenn also der Exponent negativ ist, so ists (entsprechend 69. Zus.) eben so viel, als wäre er von o abgezogen worden. Wo aber der Exponent = o, da ist (nach N. 1.) $a^{\circ} = 1$, und das Subtrahiren des Exponenten zeigt ein Dimetiiren an: folglich ist $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, und $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ u. f. Denn a^{-2} ist eben soviel als $a^{\circ} : a^2$, aber $a^{\circ} = 1$; daher auch $a^{-2} = a^{\frac{1}{2}}$, imgleichen $4^{-3} = \frac{1}{64}$, und $3^{-2} = \frac{1}{9}$ u.f.

a) Es besteht aber auch die Möglichkeit, in Gradation stehende Größen ins Unendliche fort selbst wiederum zu graduiren, und so ins Unendliche Gradationen von Gradationen zu bilden, nach welcher Gesetzen, wie wir schon (74, g) gesehen, die höhern Ordnungen unserer decadischen Zahlenschrift formirt werden. Dergleichen Größenausdrücke bezeichnet man durch den allgemeinen Ausdruck $(a^m)^n$; wo denn im Gegensatz von $A_{,}B$, weil hier keine simple Multiplication, sondern eine weitere Gradation aus Gradationen verlangt wird, also, wenn in der simpeln Multiplication mit Gradationen, dies weiter nichts als eine Addition der Logarithmen heischte, hier dagegen in der Natur, wie sich Multiplication und Gradation zu einander verhalten, nothwendig dann der Ausdruck $(a^m)^n$ fordert: daß hier die Logarithmen mit einander multiplizirt, und in deren Produkt die Größe des neuen Logarithmen gefunden werden müsse, welcher nun a als einer simpeln Grada-

tion zukommen würde. Also $(a^m)^n = a^{mn}$, welches Produkt also seyn muß $= a^m * m * m \ldots$, nemlich a^m (nach A, β) so viele male zu sich gesetzt, als n die Einheit enthält, d. i. $= a^{mn}$; demnach ist $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$.

α) Umgekehrt dagegen, in der Natur wie sich Multiplication und Dimension (59), und Gradation und Degradation (72, b), im allgemeinen und besondern sich zu einander, als sich entgegengesetzt verhalten, ist sonach die Heischung: eine gegebene Gradation zu einem bestimmten Grade zu degradiren, „daß man den Logarithmus der Gradation mit dem der gegebenen Urgröße dimetiire," so ist $\sqrt[n]{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$; und überhaupt $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Die Sätze a und α beruhen auf gleichem logischen Grund wie vorher unter A, die Sätze β und γ.

NB. Man kann den Ausdruck, z. B. $c^{\frac{1}{2}}$, der die Quadratbasis aus c anzeigt, auch so verstehen; nemlich, daß er die Größe des Faktors bedeutet, den man erhält, wenn man c in zwoen gleiche Faktoren theilt, so wie $e^{\frac{1}{3}}$ die Größe des Faktoren anzeigt, den man durch die Theilung des e in drey gleiche Faktoren erhält. Daher ist $x^{\frac{1}{m}}$, und $x^{\frac{n}{m}}$ die Größe des Faktors der durch die Theilung von x und x^n in m gleiche Faktoren erlangt wird.

Eben so muß es sich also verhalten, wenn die gegebene Gradationen Produkte von mehrere Faktoren sind. $\sqrt[n]{a^m b^q c^p} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{q}{n}} c^{\frac{p}{n}}$.

NB. 2. Weil es sich nun öfters ereignet, daß der Exponent der Gradation nicht genau durch den der Basis dimetiirt werden kann; so wird man hierdurch auf die Bruchgradationen (S. 60), eine eigene Art von Gradationen, geleitet. Dergleichen sind: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}} = a^{1\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}} = a^{1\frac{1}{3}}$ und $\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Weil nun ferner, a oder a^x einerley ist; so wird $\sqrt{a}$, d. i. Quadrat Basis aus $a = a^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{a}$, oder die Kubik-Basis aus $a = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$; und überhaupt $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ seyn. Man vergleiche γ. Nota 2.

Umgekehrt ist daher wieder $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$; $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$; $x^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{x^5}$, und überhaupt $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

Hieraus erhellet sonach, daß die Bezeichnung der Urgrößen gar wohl entbehrt, und statt ihrer, diese gebrochene Exponenten auch gebraucht werden könnten. Uebrigens lassen sich mit diesen Bruchgradationen eben die Rechnungen vornehmen, wie wenn die Exponenten ganze Zahlen sind, wie wir solches sogleich unter B. in dem Verfahren mit Urgrößen sehen werden, als zu welchem von hier der Uebergang ist.

B) Betreffs des arithmetischen Verfahrens mit Urgrößen; so ist von diesem im Voraus anzumer-

ken: daß, wenn von diesem die Rede — da, wenn $\sqrt[n]{a}$ eine rationelle ihres Grades, die wahre Mensur dieses Ausdruckes allemal gefunden wird, und also die Modificationen mit dergleichen Ausdrücken keinen besondern Schwierigkeiten unterworfen seyn können — die in der höhern Arithmetik aufzustellende Gesetze für das Verfahren mit Urgrößen, vorzüglich daher nur diejenigen Ausdrücke berücksichtigen, welche als Surden ihres Grades keinen rationellen Werth in sich enthalten, als z. E. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{ab^2}$, $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[m]{a^n b^c}$ u. f. Da nun dergleichen Ausdrücke (nach S. 60), sich als Brüche, und zwar als Brüche aus Primzahlen (75, i, δ; 24, c, β; 65, c, α) characterisiren, so hat es mit ihnen auch gleiche Bewandniß; und man nennt sie demnach von gleicher, oder ungleicher Benennung, je nachdem es die Exponenten ihrer Degradation sind (A, a, NB. 2).

α) Weil nun $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (76, A, a, α, NB. 2); so können daher auch Bruchgradationen als Urgrößen, und umgekehrt vorgestellt werden, und beide enthalten sonach einerley Regeln für sich.

Da ferner (nach B) die Urgrößen vorzüglich die Irrational-Größen in sich schließen, so werden unter jenen Rechnungsarten, auch zugleich die Rechnungen mit Irrational-Größen mit begriffen seyn.

Bruchgradationen werden also einerley Benennung haben, wenn die Nenner ihrer Exponenten gleich sind.

Daraus, daß man Bruchgradationen wie Urgrößen u. umgek. vorstellen kann, — wo denn also die hinter dem Urzeichen stehende Größe der Zähler, oder die eigentliche Größe, und also $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ ist, — ergiebt sich denn auch; daß man sie in ihren Logarithmen, als in ihrem Zähler und Nenner, gleich Brüchen, unbeschadet ihres Werthes größern und kleinern könne. (S. 65. c, λ).

β) So wie man daher Brüche, um mit solchen arithmetisch zu verfahren (60. i), vorher auf einerley Benennung zu bringen hat, eben so auch in diesem Falle mit Urgrößen, daß man sie (nach A, a, α, NB. 2.) als Bruchgradationen ausdrückt, und diese nun (nach 60. h, δ) unter einen allgemeinen Nenner bringt; und rückwärts drückt man dann wieder diese Bruchgradationen als Urgrößen aus. — So sind $\sqrt{a}$ u. $\sqrt[3]{x^2} = a^{\frac{3}{6}}$ u. $x^{\frac{4}{6}}$, welche Ausdrücke denn wiederum mit $\sqrt{a^3}$ u. $\sqrt{x^4}$ einerley und von gleicher Benennung sind. Ueberhaupt also, wenn man $\sqrt[n]{x^m}$ u. $\sqrt[p]{y^q}$ auf einerley Benennung bringen soll; so hat man erstlich $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ u. $\sqrt[p]{y^q} = y^{\frac{q}{p}}$; und diese Brüche auf gleiche Nenner gebracht $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{x^{mp}}$; und $y^{\frac{q}{p}} = y^{\frac{qn}{pn}} = \sqrt[np]{y^{qn}}$.

b) Aus den Gesetzen unter a für das Wesen von Urgrößen ergiebt sich demnach, daß die allgemeinen Modificationsgesetze für gebrochene Zahlen (S. 60. i) auch zugleich die von Modificationen mit Urgrößen, mit Rücksicht auf das als solchen ihnen zukommende ihres Wesens, seyn müssen: nemlich daß man jedesmal (nach a, α) mit der hinter dem Urzeichen stehenden Größe, als dem Zähler dieser so vorzustellenden Bruchgradation, verfährt, und die unter gleiche Benennung gebrachte Logarithmen der Urzeichen als deren Nenner betrachtet.

c) Hieraus ergiebt sich denn weiter, daß wenn man Urgrößen wiederum zu graduiren habe, man nur die hinter dem Urzeichen stehende Größe graduiren dürfe; denn $\overset{n}{r}a$ zur mten Gradation erhoben, giebt $(\overset{n}{r}a)^m = \overset{n}{r}a \,.\, r a \,.\, r a \,.\, r a \ldots\ldots = r aaaa \ldots\ldots = \overset{n}{r} a^m$ (S. 72. a). Das Wesen der Forderung giebt, daß man hier nicht etwa nach 72. f verfahren dürfe, in Rücksicht, daß $\overset{n}{r}a$ einen Größenausdruck der Beschaffenheit von (a, α) bezeichnet, da hier nicht die Gradation von $\overset{n}{r}a$, als einer gebrochenen Größe verlangt wird, sondern die Erheischung dieser Forderung ist: daß in $\overset{n}{r}a$, die Größe a, der Zähler, als die eigentliche Größe dieses Ausdrucks graduirt werden soll, und also im Grunde von einer Multiplication

dieser Bruchgradation ($\overset{n}{\gamma}a$ nemlich nach a, α als eine solche betrachtet) hier die Rede ist, mit der es sich denn (nach S. 60. i) verhalten muß.

α) Soll man dagegen aus einer Urgröße wiederum eine Urgröße ziehen, d. i. eine Degradation von einer Degradation bilden, wie der Ausdruck $\overset{r}{\gamma}\overset{n}{\gamma}a$ giebt; so hat man, wenn (nach A, a, α) schon war der Ausdruck $\overset{n}{\gamma}a^m = a^{\frac{m}{n}}$, also hier (l. l.) entsprechend, und der Natur dieser Ausdrücke (B, a, α) gemäß, eine Dimension einer Bruchgradation durch eine Bruchgradation zu verrichten, und es ist sonach (nach S. 60. i) $\overset{r}{\gamma}\overset{n}{\gamma}a = \overset{rn}{\gamma}a$. Auf welche Art man denn einer Urgröße, welche mehrere Urzeichen hat, leicht nur eines verschaffen kann.

C) Auch hier wird am Schlusse dieser Verhandlung von der Gradation und Degradation, noch von der Beschaffenheit solcher in Anwendung auf negative Größen zu denken seyn.

α) Daß positive Urgrößen auch nothwendig dergleichen Gradationen; und positive Gradationen, wiederum dergleichen Urgrößen haben und geben müssen, versteht sich von selbst. Ist aber dieses; so können überhaupt auch negative Größen hinwiederum nur negative Dignitäten und Urgrößen geben. Wenn es

daher in den mathematischen Kompendien heisset, daß $(-a)^2 = (+a)^2$ wäre, und $(-a)^3 = (-a)^3$ wäre, und daraus nun durch fortgesetztes graduiren intuitiv sogar bewiesen werden will: daß alle Gradationen von $-a$, deren Logarithmus eine gerade Zahl $+$, und deren Logarithmus eine ungrade Zahl $-$ Gradationen von $-a$ gäben; so ist dies eine Absurdität, die zu denen (S. 69. Zus.) gerügten gehört, und gleich jenen, aus der nemlichen Quelle fließt: daß man nemlich überhaupt das Wesen der entgegengesetzten Größen auch hier, wie dort bey der Multiplication und Dimension solcher, bey den Formeln für das Verfahren mit solchen, und hier insbesondere die zu nehmende Erwägung des Gesetzes S. 72. d, NB. und 75. c, NB. aus den Augen gelassen hat. Welchergestalt $-a$ nemlich ist, muß auch seine Gradation seyn, nemlich als ein Rest von oder zu einem Produkte aus Produkten von dessen ihm vorstehenden ersten Theil $= o$, da $-a$ nur einem Theil einer komplexen Größe $= (o - a)$ bezeichnet; und mit diesem Rest von oder zu dem entgegengesetzten Theil von $-a$, muß es sich denn nun in der Fortführung der Produkte von Produkten nach den Gesetzen (S. 69. Zus.) nothwendig verhalten; und eben so umgekehrt wiederum in der Degradation eines dergleichen gegebenen Ausdruckes. Denn aus dem Gesetz (S. 72. d, NB. und S. 75. c, NB.) folgt ja, daß jedes Quadrat eine positive Größe seyn müsse, entstanden entweder aus $+a \cdot +a$, oder aus $(-a) \times (-a)$ als einer und derselben Größe, (wo

es sich denn im letztern Fall nothwendig (nach 69. Zus.) verhalten muß). Wenn also nicht $+5 = -5$ ist; so ist auch -25 sein Produkt aus zween gleichen Faktoren, und also der Ausdruck $\sqrt{\ }-25$ ein Unding.

β) Nur rücksichts der Bezeichnung, nicht aber auch dem Werthe nach, können, als Urgrößen von graden Exponenten, aus unbestimmt gesetzten Gradationen zweydeutige $\left(\begin{smallmatrix}+\\-\end{smallmatrix}\right)$ Größen entstehen; denn widersprechend ist solches, wenn man dieses von dem Werthe der Zahl, oder der durch sie benannten Größe selbst verstehen will. Bey der Bezeichnung aber hat es bey negativen Ausdrücken seine Richtigkeit, indem deren wahrer Sinn sich erst (nach 41. c) aus der Beziehung ergiebt, in welchem Zusammenhange negative Größenausdrücke gesetzt sind, woher denn eben dort die Verwechselung solcher sich herleitete. Betrachts des Werthes kann man also nicht sagen, daß $\sqrt[+]{a^2} = -a$ wäre, weil a^2 sowohl aus $+a^2$, als aus $-a^2$ entstünde. Dies ist aber nicht also, denn wenn $(-a)^2 = (+a)^2$ giebt, so hat es mit diesem Produkte aus $(-a) \cdot (-a)$ die nemliche Beschaffenheit rücksichts des Werthes wie dort (S. 69. Zus. γ) mit $(-a) \cdot (-b) = +ab$.

γ) Wer also eine negative Größe ein Quadrat nennt, der sagt etwas, das sich selbst widerspricht,

und als denkbar (S. 1. f) wohl in der Imagination, nie aber als möglich (S. 1. g), geschweige denn als würklich (S. 1, h) gesetzt werden kann. Wer in einer Gleichung $z^2 = -25$, oder $z = \sqrt{-25}$ angeben verlangt, der fordert etwas unmögliches, daher man denn in der Mathematik auch nennt imaginaire, oder ohnmögliche Größen, die nur in der Imagination, nicht aber in der Würklichkeit existiren sollen, und unter welchen man denn versteht: Urgrößen unter graden Exponenten aus negativen Gradationen, weil (nach C, α) alle grade Gradationen aus negativen Urgrößen unter positiver Bezeichnung stehen, und daß also $\sqrt{-a^2}$, und überhaupt $\sqrt[2n]{-a^m}$ Ohnmöglichkeiten anzeigten. Kommt man aber im algebraischen Verfahren (wie 69. Zus.) auf dergleichen Ausdrücke, so muß man sie (nach l. l.) nicht als absolut, sondern nur als relativ gegebene betrachten, wo denn sich ergiebt, daß diese Ohnmöglichkeiten, gleich den unter β angeführten Zweydeutigkeiten, nicht, wie oftmals die Kompendien zu lehren scheinen, etwa in dem zu suchenden Werthe, sondern lediglich in der Bezeichnung der zu findenden Größe, nach der Beschaffenheit ihrer Beziehung, in welcher sie durch die vorzunehmende Modification gegen ihren anzunehmenden vorstehenden Theil, als eine komplexe zu stehen kommt, wie wir vorher unter β erwiesen haben, liegen; und daher in dieser Beziehung zu den bey ihnen, (nach l. l.) als Theil von einer komplexen Grö-

ße, vorstehend anzunehmenden Theil immer einen positiven, oder negativen Werth ausdrücken können.

δ) Die Vernachläßigung aber dieser unter β und γ nothwendig zu nehmenden Rücksichten, und daß man die zufällige Bezeichnung der Größen in entgegengesetzten Ausdrücken (69 Zus.), mit deren Werthe verwechselte, und überhaupt die Theorie von der Multiplication und Dimension entgegengesetzter Größen nicht gehörig bestimmte, hat endlich hier diesen horrenden, aller gesunden Vernunft Hohnsprechenden Lehrsatz in der allein infalliblen Mathematik erzeuget, daß man nicht erröthete, gerade zu, und nicht wie man sich nur relativisch (nach locis laud.) hätte ausdrücken sollen, in manchen Kompendien zu setzen: „daß eine ohn„mögliche Größe mit einer möglichen multiplizirt, zum „Produkt immer eine ohnmögliche hervorbringe; da „gegentheils das Produkt zwoer ohnmöglichen Größen „in einander, stets eine wirkliche, oder mögliche Grö„ße gäbe.“

Freylich hat da wohl die allein infallible Mathematik nöthig, sorgfältig von metaphysischen und logischen Künsteleyen (wie Herr Bürja sich ausdrückt) ihre Schüler abzuhalten, wenn sie dergleichen Theorien in ihrer Form aufzustellen hat.

Lächeln wird man daher, wenn uns ein gewisser Mathematiker mit einer Miene, als wie, wenn er den

Stein der Weisen gefunden hätte, sagt: „Es scheint „mir merkwürdig zu seyn, daß eine imaginaire Wur„zel, oder gebrochene Potenz, allemal in eine würkliche „Größe verwandelt werden kann. Es müßte also die „nemliche Größe zugleich imaginair, und auch würk„lich seyn können, welches doch nicht wohl zu begreifen „ist“. — Ja, letzteres meinen wir auch! — —

D) Ob wir gleich mit Recht oben (S. 74, 5.) betreffs der Modificationen mit Dezimalbrüchen gesagt haben: daß es hierinnen mit ihnen, sie allgemein als Brüche betrachtet, die nemliche Bewandniß wie mit gewöhnlichen Brüchen habe; so müssen wir doch noch hier von ihnen, als eine nöthige nähere Erläuterung zu l. l. rücksichts ihres spezifischen Unterschiedes als Minus-Gradationen von der 10 (S. 74. r.) anmerken.

a) Ist (nach 74. q.) in dem Dezimalbruch jede Größe x^{-1} als ein Ganzes ihrer Benennung, und also x^{-n*1} wiederum als ein Dezimalbruch von solchem zu betrachten; so sehen wir, daß nach dem Gesetz für negative Größenausdrücke (44, e, β, 2) nothwendig seyn muß der Werth von $x^{-n} = x^{-n*0}$; daher der arithmitische Satz: „daß der Werth eines Dezimalbruches ungeändert bleibe, man möge ihm nach der Rechten zu auch eine jede beliebige Menge von Nullen anhängen.“

b) Da der Nenner jedes Dezimalbruches (nach 74, p) eine Minus-Gradation von der 10, des Grades als die Menge der Zahlenziffern + 1 seines Zählers beträgt; so sind also an sich schon alle Dezimalbrüche von gleicher Benennung, wenn man, um sie zu addiren, oder zu subtrahiren, sie nur im Gegensatz von ganzen Zahlen (nach 74, n), von der Linken ab, gegen die Rechte, nach den Werthen des Grades ihrer einzelnen Zahlenziffern unter einander setzet.

c) In dieser Natur erweiset sich also, entsprechend §. 60, h, γ, um jeden gewöhnlichen Bruch $\frac{a}{b}$ in einen ihm gleichen Dezimalbruch zu verwandeln, als allgemeines Auflösungsgesetz die Formel: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^n}{b}$ wo denn die Mensur den Zähler eines Bruches geben muß, dessen Nenner (nach b) $= 10^n$.

α) Aus dem Wesen des Dezimalbruches ergiebt sich hier: daß, wenn man mit dem Nenner des ordinairen Bruches nicht in die grade über stehende Zahlenziffern dimetiiren kann, dieses ein Zeichen ist, daß ihm die, für die Mensur zukommende Dezimalstellen, von der Charakteristik ab fehlen, und daher noch solcher nothwendig durch Nullen angegeben werden müssen, und eben so auch bey fortgesetzter Dimension. So ist $\frac{2}{25} = 0;08$, und $\frac{3}{1024} = 0;0029296875$.

β) Findet sich hier, daß der in einen Dezimalbruch zu verwandelnde ordinaire Bruch, sich in seinem neuen Zähler gegen den alten Nenner irrationell verhält, so kann solcher nie genau durch einem Dezimalbruch angegeben werden, sondern man erhält für solchen einen unendlichen Dezimalbruch, durch welchen man zwar nie ganz genau den wahren Werth des erstern angeben, sich solchem aber unendlich nähern kann, so daß das Fehlende nach Erforderniß immer für Nichts zu achten ist (74, t). Da z. B. $\frac{1}{3}$ um eine gewisse unbekannte Größe mehr ist als 0; 33333..., so sey dieselbe = x, und es ist daher $\frac{1}{3}$ = 0; 33333 + x = $\frac{33333}{100000}$ + x; folglich x = $\frac{1}{3} - \frac{33333}{100000}$ = $\frac{100000 - 99999}{300000}$ = $\frac{1}{300000}$, mithin ist $\frac{1}{3}$ um $\frac{1}{300000}$ grösser als 0; 33333...; woher denn, wenn man $\frac{1}{3}$ = 0; 3333333333... ausdrückt, man es nur um $\frac{1}{3000000000...}$ zu groß angegeben hat.

Anm. 1. Bleibt man bey der Resolution eines gewöhnlichen Bruches in einem Dezimal, wenn sich dieser als ein unendlicher characterisirt, bey einer gewissen Gradation stehen; so setzt man daher, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, ge-

wöhnlich die letzte Zahlenziffer, wenn diese als Rest mehr als $\frac{1}{2}$ beträgt, um eine Einheit höher, als: $\frac{1}{6} = 0;16667$, weil $\frac{6}{10} > \frac{1}{2}$.

Anm. 2. Drückt man einen uneigentlichen Bruch durch eine Dezimale aus: so erhält man nothwendig für die Charakteristik (entsprechend 74, m) nicht Null, sondern die ganze Zahl, welche in dem Bruche enthalten ist; so ist $\frac{17}{3} = 5;666667$.

d) Mit Rücksicht also auf (b u. 74, p) muß man übrigens, aus gleichen Gründen (wie S. 60, i, α), Dezimalbrüche wie gewöhnliche Brüche addiren und subtrahiren.

e) Gab überhaupt (76, A, β) $a^m \times a^n = a^{m+n}$; so muß, da man jede Zahl die nicht 1, als eine, nach einem gewissen System graduirte, von irgend einer festgesetzten Basis ansehen kann, also auch in Anwendung auf unsere decadische Rechnung, überhaupt jedes Produkt zwoer Zahlen, von einerley, oder verschiedener Benennung (74, g), wenn sie reine Gradationen sind (74, f), gleich einer Gradation seyn, deren Logarithmus gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren: — und sind beide gemischte Gradationen von der 10 (74, f); so besteht das nemliche, nur mit dem Unterschied, daß dieser Fall die Regel nun genauer bestimmt; — daß nemlich diese allgemeine Regel nun von der niedrigsten Zahl im Produkt, die an der

Stelle der Einer wiederum aus dem Produkt der beiden höchsten Zahlen in den beiden Faktoren stehet, gilt: — wo denn nun (nach Grund 74, d) bey ganzen Zahlen, wenn dieser Logarithmus = n, der Größe x^n zur Rechten noch n Zahlenziffern vorstehen müssen, oder die Summe der Zahlenziffern überhaupt, wenn x^n selbst die höchste Zahl ist = n + 1 seyn muß. So giebt $10000^{=4} \times 100^{=2} = 1000000^{=5}$; und $50000^{=4} \times 300^{=2} = 15000000^{=6}$.

Dieser so von ganzen Zahlen des decadischen Gesetzes allgemein erwiesene Satz, muß nothwendig auch für Dezimalbrüche, als Minus-Gradationen dieses Gesetzes bestehen, nur mit Berücksichtigung, daß, da diese ihrer Natur nach, ihre Logarithmen nicht wie ganze Zahlen von o, sondern gleich von — 1 (74, m) anheben; hier also in einem Produkt zwoer Dezimalbrüche, die Menge der Zahlenziffern ihres Produkts, als Minus-Gradationen von der Einheit, auch gleich seyn müsse dem Logarithmus solches selbst.

Daher das Gesetz für die Multiplication mit Dezimalbrüchen: — daß man mit ihnen ganz (in Rücksicht auf b u. 74, p) wie mit ordinairen Brüchen (nach S. 60, i, β) verfährt, und im Produkt von der Rechten ab, so viel Zahlenziffern, als für das eigentliche Produkt des Bruches, durch das characteristische Kolon abschneidet, als die Menge solcher in

dem einem, oder beiden Faktoren beträgt. — Was nach der Charakteristik von der Rechten abstehet, sind Ganze, oder müssen in deren Ermangelung durch o angegeben werden (74, m). Ex. $o; 3724 \overset{-4}{\times} o; 97 \overset{-2}{=} o; 361228 \overset{-6}{=}$, und $o; 000142 \overset{-6}{\times} o; 00000086 \overset{-8}{=} o; 000000000012212 \overset{-14}{=}$, und $8; 34 \overset{-2}{\times} 14 \overset{-2}{=} 116; 76 \overset{-2}{=}$, und $4; 358 \overset{-3}{\times} 2, 35 \overset{-2}{=} 10; 24130 \overset{-5}{=}$.

NB. Folglich fließt hieraus für die Gradation von Dezimalbrüchen, (entsprechend 76, A, a) daß das Quadrat eines Dezimalbruches, zweymal, dessen Würfel dreymal so groß als dessen Basis sey; oder, daß eines Dezimalbruches vom Grade — n, sein Quadrat sey $= -2n$, und dessen Würfel $= -3n$ u. s. f.

f) Wie es sich nun überhaupt in der Dimension (nach 76, A, γ) entgegengesetzt von (e) verhalten muß, so ergiebt sich als allgemeines Gesetz für die Dimension mit Dezimalbrüchen: — daß wenn man mit Rücksicht auf (b u. 74, p) allgemein nach (S. 60, i, γ) verfährt, man die Menge der Dezimalstellen in der Mensur erhält, wenn man die des Dimensors von der des Dimetiendum abzieht, Ex. $37; 44 \overset{-2}{:} 16 = 2; 34$, und $10; 24130 \overset{-5}{:} 4; 353 \overset{-3}{=} 2; 35 \overset{-2}{=}$.

NB. Findet sich aber hier, daß sich Dimensor und Dimetiendum, beide als eine ganze Zahl während

dem dimetiiren betrachtet, irrationell verhalten; so größert man fortgesetzt immer das Dimetiendum durch eine Minus-Gradation der 10, als wodurch dessen Werth (nach D, a) an sich ungeändert bleibt, und verrichtet die Dimension fortgesetzt, bis das Dimetiendum endlich genau durch den gegebenen Dimensor gemessen ist. So ist: 1; 6:0; 625 = 1; 60000:0; 625 = 2; 56.

Trift es sich aber, daß auch hier nie das Dimetiendum genau durch seinen Dimensor kann gemessen werden, sondern daß man für dessen Mensur (nach c, β) einen unendlichen Dezimalbruch erhält; so kann man sich doch (nach l. l.) deren wahren Werth um so mehr nähern, auf je mehrere Dezimalstellen man solche berechnet, so daß das fehlende in der Praxis für Nichts angesehen werden kann. Z. B. 6; 482:2; 13 = 3; 01784037558685.... Hier ist die Mensur auf 14 Dezimalstellen, (oder bis zur 14ten Minus-Gradation) berechnet, und man kann also den letzten Rest im Rechnen (= 95) als Null ansehen; denn es fehlt eigentlich zur wahren Mensur nur =

$$\frac{95}{213000000000000000}$$

; denn

$$3;01784037558685\frac{95}{213} = 3;01784037558683\frac{95}{213000000000000000}.$$

Satz 77. Aus dem Wesen der Progressionen S. 70 bis 74, und wie diese (nach S. 72, c) den nächsten Grund von den Gradationen in sich enthalten, müssen sich denn auch die Gesetze für die mit solchen vorzunehmenden möglichen Modificationen ergeben, und als solche ihres Ortes in einem System der höhern Arithmetik erweisen lassen. Nach dem Plane unsers Werkes, müssen wir solche ganz dorthin verweisen, und uns genügen, hier nur einer mit im Verhältniß oder Vergleichung stehender Größen möglichen Modification, nemlich der Erfindung einer mittlern Proportional-Größe zu erwähnen.

So wie nemlich (S. 70, b, γ) der Ausdruck a ∴ b ∴ c drey proportionirte Größen gab; so heißt in einem dergleichen Ausdruck, wenn eine Größe b zwischen zwo gleichartigen a und c also in der Mitte stehet, daß sich die ihr vorstehende a eben so zu ihr verhält, wie sie sich selbst wieder zu der ihr folgenden c, die Größe b eine mittlere Proportionale zwischen a und c. Sind aber drey proportionirte Größen (nach l. l.) sich als eine stetige Proportion vorzustellen, und ist (nach 66, e) in jeder Proportion das Produkt der beiden äussern Glieder gleich dem der beiden Mittelglieder: und giebt sonach die stetige Proportion zu diesem Produkt ihrer Mittelglieder, ein aus zween gleichen Faktoren entstandenes Produkt, welches also (nach 72, d;

75, i) gleich einer Quadratzahl, die da gleich ist dem Produkt der beiden äussern Glieder; so muß also bey jeden drey proportionirten Größen, das Produkt von $a \times c$, als den beiden äussern Gliedern seyn $= b^2$, gleich seyn dem Quadrat der mittlern Proportionalzahl. D. i. in dem Ausdruck $a \dot{\times} b \dot{\times} c$ ist $b^2 = a \times c$.

Da man sich nun jede zwo ungleiche Zahlen a und c im Verhältniß zu einander vorstellen kann; so findet man also jederzeit zwischen ihnen eine mittlere Proportionale $b = \gamma ac$.

NB. Wenn daher eine Quadratzahl einem Produkt zwoer Zahlen gleich ist; so ist ihre Basis die mittlere Proportionale zwischen diesen beiden Faktoren. D. i. wenn $u^2 = nr$; so ist $n \dot{\times} u = u \dot{\times} r$.

b) Eben so wie dagegen (nach S. 71, a, β, NB.) der Ausdruck $a \div b \div c$, drey in Vergleichungsprogression stehende Größen gab; so heißt in einem dergleichen Ausdruck, wenn eine Größe b, zwischen zwoen gleichartigen also in der Mitte stehet, daß sie um eben so viel größer als die ihr vorstehende, als um wie viel sie vor der ihr nachstehenden kleiner ist, ebenfalls auch eine mittlere Vergleichungsgröße zwischen a und c. — Sind nun aber auch wiederum drey dergleichen in Vergleichungsproportion stehende Größen (nach l. l.) als eine stetige dieser Art sich vorzustellen, in welcher (nach S. 68, b, β) die Summe der beiden äussern

Glieder, gleich dem Doppelten von einem der beiden Mittelglieder ist; so muß demnach bey jeden drey in Vergleichungsproportion stehenden Größen die Summe von a + c, als den beyden äußern Gliedern, seyn = b. 2, gleich seyn dem Doppelten der mittlern Vergleichungsgröße, d. i. in dem Ausdrucke a ÷ b ÷ c ist b. 2 = a + c.

Da man sich nun ebenfalls jede zwo ungleiche Zahlen a u. c als in Vergleichung gegen einander gestellt vorstellen kann; so findet man also auch zwischen ihnen jederzeit eine mittlere Vergleichungsgröße $b = \frac{a + c}{2}$.

NB. Characterisiren sich in diesem Fall a und c als nächste Größen (S. 44), die als solche nur um die Einheit unterschieden sind; so muß denn b nothwendig eine gebrochene Zahl seyn.

Aus diesem 77ten Satz ergiebt sich denn nun weiter.

Satz 78. Setzt man eine, für irgend ein Zahlensystem angenommene Progression, als eine, auf einer gewissen Basis x ruhende Gradationsreihe (nach 74 und 72, a, γ) angenommen, daß man nemlich diese Basis selbst, als den Exponent der Progression (zufolge 72, a, ε), wie in der ersten Gradation stehend, und als zweites Glied der Progression betrach-

tet, unter welche man nun (nach 72, h) die Vergleichungsreihe der natürlichen Zahlen, als die ihr zugehörigen Logarithmen schreibt; so läßt sich denn vermittelst der Anwendung der Gesetze von S. 77. für jede zwischen x^m und x^{m+1} dieses Zahlengesetzes fallende Größe P der ihr zugehörige Logarithmus erfinden. Welches uns denn auf die Exponentiation, als eine noch übrige Modification mit in Verhältniß gesetzten Größen führt.

a) Die Exponentiation, deren Begriff wir schon oben S. 72 im Allgemeinen gegeben haben, begreift also, diesen dort gegebenen allgemeinen Begriff determinirter ausgedrückt: — 1) die Erfindung des Grades von welchem eine Zahl, solche als den bestimmten Ausdruck für ein Wievieles nach einem festgesetzten Zahlensystem (74, b) angenommen; d. i. die Erfindung des ihr nach einem (zufolge l. l.) festgesetzten Zahlensystems zugehörigen Exponenten, des Logarithmus (74, a, α): — Oder 2) umgekehrt, die Erfindung der zu einem gegebenen Logarithmus gehörigen Zahl eines gewissen Systems. — 3) Begreift die Exponentiation die Anwendung der Logarithmen in dem verhältnißmäßigen Verfahren mit Zahlen, statt dieser Zahlen selbst, für deren Logarithmen sie sich nach einem gewissen angenommenen Zahlensystem erweisen. — Es umfaßt sonach die Exponentiation das arithmetische Verfahren mit Exponenten oder Logarithmen in

Gradation stehender Größenausdrücke statt mit solchen selbst, und ist demnach, was man gewöhnlich auch die Logarithmenrechnung, oder die Rechnung mit Logarithmen benennt.

NB. Den Begriff von Logarithmus, und deren Anwendung statt der ihnen zugehörigen Zahlen, haben wir an seinem Ort schon oben (S. 72, a, α und 76 A) gegeben, angeführt und erhärtet.

b) Wie man Zahlensysteme hat (74, b), und nach diesen (zufolge 74, a, b u. c) eine jede Zahl als eine graduirte von der Basis ihres Systems anzusehen ist; eben so muß es daher, weil also jede Zahl irgend eines möglichen Zahlensystems, auch nothwendig den ihr zugehörigen bestimmten Logarithmus haben muß, auch für jedes mögliche Zahlensystem, ein, diesem entsprechendes Logarithmensystem geben. So nennt man nemlich jede Reihe von Logarithmen, welche mit einem bestimmten, für ein festgesetztes Zahlensystem angenommenen Gradationsgesetz irgend einer benannten Größe X verbunden ist. — Wie daher (nach 74, b) die Möglichkeit unendlicher Zahlensysteme besteht; eben so verhält es sich also auch mit den Logarithmensystemen. Denn, die zur Gradation für irgend ein Zahlensystem angenommene Basis, giebt auch nothwendig verschiedene Systeme, oder Folgereihen der dieser Gradationsreihe zugehörigen Logarithmen, woher denn ein und derselbe Logarithmus gan-

verschiedene Größen anzeigen kann, je nachdem sie von verschiedenen Urgrößen in ihren Gradationen ausgegangen, oder geschrieben sind. Doch versteht es sich von selbst, daß (nach S. 27) jeder Logarithmus eines bestimmten Systems, immer nur eine Zahl dieses seines Systems bezeichnen kann.

NB. Das Verhältniß des X, die Basis eines Zahlen-, und diesem zugehörigen Logarithmensystems zur Einheit hat, nennt man das Fundamental-Verhältniß eines auf X (nach S. 74) gebaueten Zahlen- und Logarithmensystems.

α) Gleiche Größen, nach einem und demselben Zahlensystem ausgedrückt, geben also auch nothwendig gleiche; und ungleiche Größen, ungleiche Logarithmen.

β) Die Bezeichnung des Logarithmen im arithmetischen Verfahren mit solchen ist log. oder schlechthin l. z. B. $x = \log. y = \log. a^x$, oder $x = l. y = l. a^x$. Also ist $l. a^1 = 1$, $l. a^2 = 2$, $l. a^3 = 3$, und überhaupt $l. a^n = n$. Z. B. wenn man die Grundzahl $a = 10$ setzt, so ist $l. 10 = 1$, $l. 10^2$ oder $l. 100 = 2$, $l. 10^3$ oder $l. 1000 = 3$ u. s. w., und überhaupt $l. 10^n = n$.

γ) So unzählige Zahlen, und diesen entsprechende Logarithmensysteme man aber auch nur (nach) 74, b) annehmen kann; so besteht doch, daß, da alle Zahlensysteme auf Gradationen gebauet sind, und die Zahl 1

(nach 72, a, δ) keine Gradation giebt; daher, wie (74, e und g) erwiesen, solche in allen möglichen Zahlen und Logarithmensystemen, immer nur = o zu ihrem Logarithmus haben kann. Beständig ist log. 1 = o.

δ) Wie jedes Zahlensystem für ganze Zahlen von einer angenommenen Basis x (x ≠ 1, und nach 74, d als eine zusammengesetzte Zahl angenommen) anhebend, in seinen habenden Benennungen, nach 74, f u. g, durch lauter in einer natürlichen Reihe sich folgenden Gradationen dieser seiner Basis x, solche (nach 72, a, ε) für den Exponent dieser Gradationsreihe und selbst als vom ersten Grade in solcher betrachtet, ins unendliche fortgehen muß; so muß denn daher auch nothwendig das ihm zukommende Logarithmensystem eine (nach l. l. u. 72, h) Vergleichungsgradation von der Basis 1 mit der Differenz 1 seyn: d. i. der Logarithmus von x, das für die Basis irgend eines Zahlensystems, ist (nach 74, c) nothwendig = 1, und alle übrige Logarithmen für alle folgende Gradationen von x in diesem System, stehen in der Reihefolge der natürlichen ganzen Zahlen, als dergleichen nächste Größen: — oder die Logarithmen eines Zahlensystems verhalten sich zu den Gradationen von x, der Basis dieses Systems, wie eine (nach 71, a, γ) in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückte Vergleichungsprogression deren Differenz = 1, und die als solche (nach l. l. N. 2) eine Reihe natürlicher ganzer Zahlen giebt, sich verhält zu einer (nach S. 70, b, ε) in ihren kleinsten

Zahlen ausgedrückten Verhältnißprogression, deren Exponent = x ihr zweites, und ihr erstes Glied = 1 ist. Daher sagt man denn nun, daß man das einem Zahlensystem zugehörige Logarithmensystem erhalte: wenn man ersteres als eine in ihren kleinsten Zahlen (nach 70, b, ε) ausgedrückte Verhältnißprogression, und letztere darunter als eine natürliche Reihefolge ganzer nächster Zahlen (wie 72, i) setze. — Auch siehet man leicht, daß die den Gradationen des Zahlensystems von dessen Basis x zugehörige Logarithmen, nothwendig ganze Zahlen seyn müssen, denn sie stehen als Logarithmen von vollkommenen Gradationen der als Basis des Systems angenommenen ganzen Zahl x.

NB. Die ganze Bestimmung eines Logarithmensystems beruht also auf die Bestimmung der Größe x, als der Basis von der ihm zugehörigen Gradation (nach 74. b), welcher der Logarithmus = 1 zukommt, von welcher log. 1 = x^1 angenommen ist.

c) Die Vortheile, welche man beym arithmetisch-verhältnißmäßigen Verfahren mit großen Zahlen haben kann, wenn man, wie S. 76. A erwiesen worden, statt in Gradation stehender Größen mit deren Logarithmen verfährt: und daß man eine jede Zahl, die nicht 1, als eine graduirte von einer gewissen Basis ansehen kann, leiteten, obgleich erst in neuern Zeiten, auf die in ihrer Art mehr mühsame als tiefsinnige Erfindung und Berechnung von einem vollstän-

digen Logarithmensystem, in welchem tabellarisch bis zu einer gewissen Menge, in natürlicher Reihefolge, die Logarithmen für eine jede innerhalb der Gränze dieser Menge enthaltene Zahl für unser dekadisches System enthalten sind. Bekanntlich hat Heinrich Brig's, Professor zu Oxford, zuerst in der ersten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts für dieses unser dekadisches System die Logarithmentafeln berechnet, deren wir uns noch unter dem Namen der Brig's=schen Tafeln bedienen, und welche in den gewöhnlichen kleinern Ausgaben, die durch Vlacq's, eines Holländers Besorgung davon erschienen sind, und wovon unter dem Titel: Adriani Vlacq tabulæ Logarithmorum &c. zu Frankfurt bey Fleischer 1790, von Hr. Ebert wiederum eine neue Auflage herausgekommen, bis auf die Zahl 10000 gehen.

Von den größern für unser dekadisches System gestellten Logarithmentafeln zeichnen sich besonders die von Hrn Vega zu Wien herausgegebene aus, welche die Logarithmen bis für die Zahl 100499 enthalten.

Neben den Logarithmentafeln für unser dekadisches System, existiren auch noch andere Logar. Systeme für andere Zahlensysteme gestellt, um welche aber, weil sie eben den Vortheil gewähren, den jedes andere aufgestellte Zahlensystem leisten muß, d. i. — keinen, wir uns hier nicht bekümmern, sondern uns lediglich nur auf die unserm dekadischen Zahlensystem

entsprechende Logarithmen beschränken wollen. Da, nach dem, was wir schon von der allgemeinen Beschaffenheit der Logarithmen und logarithmischen Systeme angeführt haben, und noch beybringen werden, sich hier aus den einzeln aufgestellten Gesetzen leicht das Allgemeine abstrahiren läßt; und die Logik eben so gut den Schluß vom Besondern, nach Ausnahme des dazwischen tretenden spezifischen Unterschiedes, aufs Allgemeine, als umgekehrt gestattet.

Erfindung der Logarithmen.

d) Unser dekadisches Zahlensystem macht (nach 74. g) von der Basis 10 in seiner Fundamentalordnung seine Gradationen bis 10^5, und giebt also für das Hauptgesetz der Fundamentalordnung der nach ihm geordneten Zahlenschrift folgende Progression mit ihrer darunter stehenden Logaritmenreihe: (b, d)

x^5		x^4		x^3		x^2		x^1		1
100000	⁝	10000	⁝	1000	⁝	100	⁝	10	⁝	1
5	÷	4	÷	3	÷	2	÷	1	÷	0

wo sich also die den reinen Gradationen dieses Systems zugehörigen Logarithmen, — welche (nach 74. d) um eine Einheit geringer sind als die Menge der Ziffern der ihnen zugehörigen Zahl, — von selbst ergeben, je weiter man nun auch immer ins Unendliche diese Gradationen fortsetzen will. Denn so ist nun nothwendig $1{,}000000 = \text{l. } 10^6 (x^6) = 6$ u. s. w.

Wie nun aber weiter, (zu Folge 74. a, u. f) jede Zahlenschrift, und also auch unsere dekadische, um alle mögliche Größe durch Zahlenziffern auszudrücken, neben der Gradation ihrer Basis, als ihrem Hauptgesetz, noch als Hülfs- und Nebengesetz für die zwischen x^0 u. x^1 u. x^2 u. s. f. fallende Größenausdrücke eine Vergleichungsgradation der natürlichen Zahlenreihe von der 1 mit der Differenz 1 bis zu ihrer Basis gehend, annehmen muß: und also theils aus reinen, theils aus gemischten Gradationen (nach l. l.) bestehet; so kam also bey Verfertigung eines Logarithmensystems für unsere dekadische Zahlenschrift alles an auf die Erfindung der Logarithmen für diese gemischte Gradationen, welche zur Ausfüllung der natürlichen Zahlenreihe jedesmal zwischen 10^n und 10^{n+1} (zwischen x^n und x^{n+1}) fallen. Wenn demnach noch keine Logarithmentafeln für unser dekadisches Zahlensystem erfunden und berechnet wären, wie hätte man da, um diese Forderung zu leisten, zu verfahren? —

Um diese Aufgabe zu lösen, sind aber vorher noch folgende, aus dem Begriff und Wesen der Logarithmen fließende Grundgesetze für sie zu bestimmen.

α) Müssen (nach b, δ) für die reinen Gradationen von der Basis 10 (x), den Hauptbenennungen der Größenausdrücke nach diesem System (74. g) in jeder, durch alle seine möglich werdende Zahlenordnungen, die solchen zugehörige Logarithmen nothwendig die

ganzen Zahlen einer natürlichen Zahlenreihe in dergleichen nächsten Größenausdrücken seyn; so erhellet, daß nothwendig alle zwischen die Gradationen 10^n und 10^{n+1} (x^n und x^{n+1}) fallende Zahlen (nach 74. f) Brüche seyn müssen. Jeder Zahl Logarithmus also, welcher zwischen 10^n und 10^{n+1} (x^n und x^{n+1}) fällt, ist $\succ n$ und $\prec n+1$, er ist also eine gemischte Zahl $= n + \frac{n}{m}$, oder $= n + 1 - \frac{n}{m}$.

β) Verhält es sich weiter in unserm dekadischen System, daß (nach 74. c) die $10 = 10^1$, für die Basis x^1 des Systems festgesetzt, und daß log. 1 (nach b, γ) nothwendig $= 0$; so muß also in diesem unsern System jede Größe $y \succ 1$ und zugleich $\prec 10$ ($y \succ 1$ u. $\prec x$) zu dem ihr zugehörigen Logarithmus einen eigentlichen Bruch haben: denn es muß in diesem Fall seyn log. $y \succ 0$, und doch auch $\prec 1$, also es muß seyn log. $y = \frac{n}{m}$.

γ) Um nun diese Brüche, welche für die Logarithmen aller der Zahlen kommen, welche in unserm System zwischen 1 und 10 (1 u. x), und jede 10^n und 10^{n+1} (x^n u. x^{n+1}) fallen, zu erhalten; so sucht man solche am bequemsten und natürlichsten in Brüchen dieses Gesetzes selbst, d. i. in Dezimalbrüchen: und man findet die wahre Größe eines solchen Logarithmen um desto genauer, auf je weitere Dezimalstellen man

die Berechnung (75. i, δ u. 74. t) fortsetzt; welche in unsern gewöhnlichen Logarithmentafeln bis auf sieben Dezimalstellen gehen, wo also das fehlende von dem wahren der Zahl zukommenden Logarithmus nur $\frac{1}{10,000000}$ von der Einheit, und also um ein für die Praxis ganz unbeträchtliches abweicht. Denn (nach 76. D, c, Anmerk. 1.) hat man in diesen Tafeln die letzte, oder siebente Ziffer dieses Dezimalbruches um 1 erhöht, wenn bey weiterm Verfahren eine grössere Zahl als 5 für die achte Ziffer gekommen seyn würde, weil in diesem Fall das fehlende mehr als $\frac{5}{10}$ oder $\frac{1}{2}$ von der Einheit in der Art der letzten Ziffer betragen hat; im Gegentheil aber dieses fehlende, weil es unter $\frac{1}{2}$ des Werthes dieser letzten Ziffer, für 0 gerechnet.

δ) Da man nun aber, weil der einer zwischen 1 und 10^1, und 10^n und 10^{n+1} fallenden Zahl zugehörige Logarithmus nicht anders als in einem Dezimalbruch gefunden wird, arithmetisch nicht anders, als mit Gleichem in Gleiches verfahren kann; so muß man hier auch die Logarithmen der reinen Gradationen, also die (nach d) selbst in ganzen Zahlen sich ergebende Logarithmen (nach 76. D, c) als Dezimalbrüche ausdrücken, als wodurch (S. 76. D, a) deren Werth selbst ungeändert derselbe bleibt: und wenn man für die gesuchte Zahl einen kleinern Logarithmen, als in sieben Zahlen ausgedrückt findet; so muß man solchen eben

daher auch durch Anhängung von den noch fehlenden Nullen (nach S. 76. D, b) mit den übrigen sieben-ziffrigen von gleicher Benennung machen. — Die Progressionsfolge der reinen Gradationen unserer dekadischen Zahlenschrift giebt also nach den Gesetzen für den Ausdruck von Dezimalbrüchen:

l. 1 = 0;0000000
l. 10 = 1;0000000
l. 100 = 2;0000000
l. 1000 = 3;0000000
l. 10000 = 4;0000000
l. 100000 = 5;0000000

Denn da der Logarithmus aller Zahlen, die weniger als die Basis 10, die also einfache Zahlen dieses Systems sind, = 0; so muß dagegen von jeder zusammengesetzten Zahl solches der Log. eine Einheit weniger ausdrücken, als die Menge der ihm zugehörigen Zahlenziffer, da 10, die erste zusammengesetzte Zahl nur 1 zu ihrem Log. giebt. Also log. 0, giebt eine einfache Zahl, und log. n, giebt eine n + 1 ziffrige Zahl zu der er gehört, und so umgekehrt, nach den erwiesenen Gründen S. 74. c u. d; denn der Log. einer jeden graduirten ganzen Zahl, muß kleiner seyn als diese, zu Folge S. 72. i, NB.

ε) Diese erste Zahl, welche so den in Dezimalbrüchen ausgedrückten Logarithmen vorsteht, und wie in einem Dezimalbruch durch den Punkt, (oder besser

durch ein Kolon) abgeschnitten ist, und an welcher man erkennt, welcher Gradation von der 10 er zugehöre, oder was für eine vielziffrige Zahl er (nach δ) als ihm zugehörig habe, heißt, wie bey Dezimalbrüchen (74. m, NB.), daher auch hier die Charakteristik, oder Kennziffer des Logarithmus; und die nach dem Punkt oder Kolon stehende Dezimalen, heißen die Mantisse.

Alle Zahlen unsers dekadischen Systems also, die weniger als 10, haben zur Charakteristik ihres Log. = 0.

δ) Hat nun die Charakteristik, wenn sie eine Zahl, hinter sich zur Mantisse lauter Nullen; so ist sie (nach δ) der Log. einer reinen Gradation von x, und im Gegentheil verhält es sich mit ihr (nach α) wie mit einer gemischten Zahl, daß sie nemlich den Log. einer von ihr abhängigen gemischten Gradation, also einer ihr zugehörigen, zwischen ihr und der nächstfolgenden Hauptgradation der Basis des Zahlensystems fallende Zahl enthält.

Eben so verhält es sich mit der Charakteristik 0, nur aber, daß wenn deren Mantisse nicht auch lauter Nullen hat, und in diesem Fall = log. 1 giebt, hier (nach β) der Log. als ein eigentlicher Bruch von einer Zahl stehet, die noch keine ganze Gradation der Basis in sich begreift.

NB. Natürlicher Weise muß denn hier, wenn die Größe y zwischen log. o u. 1 liegt, die Mantisse um desto kleiner seyn, je näher y am Log. o, und um desto größer, je näher y bey log. 1 liegt; eben so wenn y zwischen x^n und x^{n+1} fällt.

2) Wie wir nun so bisher gesehen haben, daß der Log. jeder Zahl, wenn er nicht = log. 1, oder = dem log. einer reinen Gradation der Basis des angenommenen Zahlensystems, im ersten Fall als ein ächter Bruch zwischen log. o und log. 1; im zweeten dagegen, in der Natur einer gemischten Zahl, zwischen l. x^n und x^{n+1} fallen müsse (nach d, α u. β), und also ganz natürlich (zu Folge d, δ u. γ) in Dezimalausdrücken als eine mittlere Proportionale (nach S. 77.) zu suchen sey: sich nun aber (nach b, δ) die Logarithmen eines Zahlensystems zu den Gradationen von x, der Basis dieses Systems, verhalten, wie eine in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückte Vergleichungspro. gression deren Differenz = 1, zu einer in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückten Verhältnißprogression, deren Exponent = x ihr zweites, und = 1 ihr erstes Glied ist; — so müssen hier in Dezimalausdrücken beide, immer zugleich als mittlere Proportionalen gesucht werden, nemlich: die Zahl des Systems, ihrer Natur gemäß, als eine mittlere Verhältnißgröße zwischen zween je nächsten Zahlen des Systems: und der ihr zukommende Log. als eine mittlere Vergleichungsgröße zwischen deren beiden Logarithmen, weil

diese so allemal (nach b, d) den dazu gehörigen Log. geben muß. Für beider Erfindungen setzt man die Operation in den festgesetzten Dezimalausdrücken (als bis etwa auf sieben Stellen) so lange fort, bis man in solchen die gesuchte Zahl des Systems $= n;0000000$ findet, wo denn die gefundene zu $n;0000000$ mittlere Vergleichungsgröße deren Log. giebt. Den noch für beide im Verfahren nachbleibenden Rest hat man für Null anzusehen, weil er nur um $\frac{1}{10;000000}$ von dem wahren Werth der beiden Zahlen fehlet, und man so beide gesuchte Zahlen zwischen ihre zwo engsten Gränzen, zwischen welche sie fallen müssen, eingeschlossen erhalten hat. Denn

α) Wenn man die oben (unter d, und S. 74, g; und 72, h) angeführte allgemeine Reihe wieder vornimmt,

$$1 \div x \div x^2 \div x^3 \div x^4 \div x^5 \ldots \div x^m \div x^{m+1} \ldots . x^n,$$
$$0 \div 1 \div 2 \div 3 \div 4 \div 5 \ldots \div m \div m+1 \ldots . \div n,$$

und zwischen dem ersten und zweiten Glied der Verhältnißprogression eine mittlere Proportionale sucht, welche $= r\,x$ $(1.x = x)$ wird; so ist das Verhältniß $1 \div r\,x = \frac{1}{2}(1 \div x)$: und weil die Verhältnisse jeder zweyer andern zunächst auf einander folgenden Glieder, insgesammt unter sich, also dem Verhältniß $1 \div x$ gleich sind (70); so wird auch, wenn man zwischen zweyen dergleichen Gliedern, eine mitt-

lere Proportionale sucht, das Verhältniß zwischen dem ersten dieser Glieder und der gesuchten Zahl $= \frac{1}{2}$ $(1 \dot{:} x)$ seyn. Sucht man nemlich zwischen x^m und x^{m+1} eine solche mittlere Proportionale, welche wir P nennen wollen; so wird $P = \gamma (x^m . x^{m+1})$ (S. 77.) $= \gamma x^{2m+1} = x^{\frac{2m+1}{2}}$ (76, A, a, α) $= x^{m+\frac{1}{2}}$, und mithin $x^m \dot{:} P = x^m \dot{:} x^{m+\frac{1}{2}} = 1 \dot{:} x^{\frac{1}{2}}$ (65, c, und wenn nemlich beide Glieder mit x^m dimetiirt werden) $= 1 \dot{:} \gamma x = \frac{1}{2} (1 \dot{:} x)$. Man hat also, (da von 1 bis x^m, m Verhältnisse wie $1 \dot{:} x$ statt finden (72, a, α), von 1 bis P, $m + \frac{1}{2}$ dergleichen Verhältnisse.

Es drückt also $m + \frac{1}{2}$ die Menge der gleichen Verhältnisse aus, welche von 1 bis P statt finden: und mithin ist $m + \frac{1}{2}$ der Log. von P (72, a, α). — Da nun die Zahl $m + \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{2}$, d. i. die mittlere Vergleichungsgröße zwischen m und $m + 1$, also zwischen dem Log. von x^m und x^{m+1} ist; so kann man hieraus den Schluß ziehen: daß der Log. einer Zahl welche zwischen zwoen andern Zahlen die mittlere Proportionale ist, die mittlere Vergleichungsgröße zwischen den Logarithmen von eben diesen zwoen Zahlen

ist: — und weil ferner die dem Log. $m + \frac{1}{2}$ zukommende Zahl $P = +^{m+\frac{1}{2}}$, also dem Exponenten von x gleich ist, so ist solcher zugleich der Logarithmus der Gradation, auf welche x erhoben werden muß, damit die Zahl P herauskommt, wie solches nach dem Begriff und Wesen eines Log. (72, a, α) erfordert wird.

β) Wenn man daher ferner zwischen x^m und P, desgleichen zwischen P und M^{m+1} eine mittlere Proportionale sucht, und erstere = Q letztere = K setzt; so wird $Q = \gamma (x^m . x^{m+\frac{1}{2}}) = \gamma x^{2m+\frac{1}{2}} = x^{(2m+\frac{1}{2}):2} = x^{m+\frac{1}{4}}$, und $K = x^{m+\frac{3}{4}}$; und man findet wie vorhin, daß von 1 bis $Q^{M+\frac{1}{4}}$, von 1 bis K aber, $M + \frac{3}{4}$ Verhältnisse, wie 1 ∴ x, statt finden: und daß mithin $M + \frac{1}{4}$, den Log. und Exponenten von Q. $M + \frac{3}{4}$ aber, den Log. und Exponenten von K vorstellt. (α u. 76, A, γ) Sucht man nun aufs neue zwischen x^m und Q, zwischen Q und P, P und K, und K und x^{m+1} mittlere Proportionale; desgleichen zwischen M und $M + \frac{1}{4}$, zwischen $M + \frac{1}{4}$ und $M + \frac{1}{2}$, zwischen $M + \frac{1}{2}$ und $M + \frac{3}{4}$, und zwischen $M + \frac{3}{4}$ und M + 1 mittlere Vergleichungsgrößen; so werden allemal die erhaltenen mittlern Proportionalen, die Zahlen: die gleichnamigte Vergleichungsgrößen aber, die denselben zu-

gehörigen Logarithmen vorstellen, man mag auch dieses Verfahren so lange fortsetzen als man will.

γ) Durch dieses fortgesetzte Verfahren nun, ist man im Stande den Logarithmus einer jeden, zwischen x^m und x^{m+1} liegenden Zahl Z zu finden. Denn nachdem man P gefunden, so wird Z entweder zwischen x^m und P, oder zwischen P und x^{m+1} fallen. Ist jenes, d. h. liegt Z zwischen x^m und P; so sucht man Q: und es wird alsdann Z entweder zwischen x^m und Q oder zwischen Q und P fallen. Ist aber dieses, d. h. liegt Z zwischen P und x^{m+1}, so sucht man K, und es wird alsdann Z, entweder zwischen P und K, oder zwischen K und x^{m+1} fallen. Je nachdem nun dieses, oder jenes statt findet; so sucht man zwischen den erhaltenen Größen immer wieder neue mittlere Proportionale. Hiedurch ergeben sich also Zahlen, welche immer näher und näher zusammenrücken, und man schließt mithin Z zwischen zwo Gränzen ein, die man ohne Ende immer mehr verengern kann; also, daß dieselbe zuletzt von Z so wenig abweichen, daß man ihren Unterschied in der Praxis, gänzlich außer Acht lassen, und folglich eine von diesen Gränzen für Z selbst, so wie den Logarithmus dieser Gränzen, für den Log. von Z annehmen kann.

Weil nun jede Zahl zwischen ein Paar Glieder der Progression (α) fallen muß, und die obigen Betrachtungen auf jedes solches Paar bezogen werden können;

so sieht man folglich hieraus die Art, wie sich die Logarithmen aller ganzen Zahlen finden lassen.

δ) Da P als die mittlere Proportionale, zwischen 10^m und 10^{m+1}, $= 10^{m+\frac{1}{2}} = 10^m 10^{\frac{1}{2}} = 10^m \gamma 10$ wird; $\gamma 10$ aber irrationell ist; so ist auch $10^m \gamma 10$, oder P irrationell. Ist aber P irrationell; so muß es um so mehr Q und K, und überhaupt jede andere zwischen x^m, Q, P, K und x^{m+1} liegende mittlere Proportionale seyn: und es kann folglich durch dieses Verfahren niemals, weder eine ganze Zahl, noch auch ein bestimmter eigentlicher Bruch, folglich auch niemals eine von den zwischen den Gliedern der Hauptreihe (d; d, α und γ) liegenden Zahlen erhalten werden. Die Logarithmen, welche zu diesen Irrationalzahlen gehören, als M, $M + \frac{1}{4}$, $M + \frac{1}{2}$, $M + \frac{3}{4}$ und $M + 1$, können zwar durch Brüche ganz genau angegeben werden; allein, da die ihnen zugehörigen Irrationalzahlen blos die Gränzen der Zahlen (nach γ) bestimmen, ohne solchen jemals gleich zu werden: so können auch diese Logarithmen nie vollkommen genau die Stelle der Logarithmen der verlangten Zahlen vertreten. Es erhellet sonach, daß sich die Logarithmen aller Zahlen, welche zwischen die Glieder der Reihe (d) fallen, niemals vollkommen genau bestimmen lassen.

3) Diesen allgemeinen Schlüssen (unter 2) zufolge, ist denn die Auflösung; für irgend eine Zahl

unſers dekadiſchen Syſtems den ihr zugehörigen Logarithmus, z. B. für die Zahl 9 zu ſuchen, wie nachſtehende Tafel über die Erfindung des Logarithmus dieſer Zahl ausweiſet: in welcher, um noch genauer zu verfahren, die Berechnung der Logarithmen bis auf acht Dezimalſtellen geführt ſind.

A = 1; 0000000 B = 10; 0000000	mittlere Proportionale.	zugehörige Logarithmen.
γ ab = c	3; 1622777	0; 50000000.
γ bc = d	5; 6234132	0; 75000000.
γ bd = e	7; 4989421	0; 87500000.
γ be = f	8; 6596432	0; 93750000.
γ bf = g	9; 3057204	0; 96875000.
γ gf = h	8; 9768713	0; 95312500.
γ gh = i	9; 1398170	0; 96093750.
γ hi = k	9; 0579777	0; 95703125.
γ hk = l	9; 0173333	0; 95507812.
γ hl = m	8; 9970796	0; 95410156.
γ lm = n	9; 0072008	0; 95458983.
γ mn = o	9; 0021388	0; 95434570.
γ mo = p	8; 9996088	0; 95422363.
γ op = q	9; 0008737	0; 95428467.
γ pq = r	9; 0002412	0; 95425415.
γ pr = s	8; 9999250	0; 95421889.
γ rs = t	9; 0000831	0; 95424652.
γ st = v	9; 0000041	0; 95424271.
γ sv = x	8; 9999650	0; 95424080.
γ vx = y	8; 9999845	0; 95424217.
γ vy = z	8; 9999943	0; 95424223.
γ vz = α	8; 9999992	0; 95424247.
γ vα = β	9; 0000016	0; 95424259.
γ $\alpha\beta$ = γ	9; 0000004	0; 95424253.
γ $\alpha\gamma$ = δ	8; 9999998	0; 95424250.
γ $\gamma\delta$ = ε	9; 0000000	0; 95424251.

α) Man hat nemlich hier zuerst zwischen a = 1; ooooooo, und b = 10; ooooooo die mittlere Proportionale: und für die zu a und b gehörige Logarithmen, l. a = o; oooooooo, und l. b = 1; oooooooo die mittlere Vergleichungsgröße (nach 77) zu suchen; wo denn γ ab = c = 3; 1622777, und der zu c gehörige Log. $= \frac{\text{l. o} + \text{l. 1}}{2} =$ o; 50000000 gefunden wird. Nemlich, man dürfe ihn endlich nur unbeschadet seines Werthes, der gleichen Benennung in den Tafeln wegen (zufolge d, δ) auf einen Dezimalbruch von x^{-8} bringen.

NB. Da hier bey der Dimension mit dem Dimensor in die grade überstehende Zahl o nicht verfahren werden kann; so ist dies ein Zeichen, daß die Mensur für die Charakteristik des zu findenden Log. = o ist, indem es sich nach 76, D, c, α u. f verhält. — Gegentheils, wenn in einem dergleichen Fall die Dimension angeht; so giebt also die Mensur für die Charakteristik eine benannte ganze Zahl, und charakterisirt den Log. als eine gemischte Zahl, entsprechend als einer gemischten Gradation zugehörig (nach d, α), indem es sich nun hier für die Dezimale wie 76, D, Anm. a. und f verhält.

β) Da nun diese gefundene mittlere Proportionale zwischen 1 und 10 (a u. b), näher bey 10 (bey b), als bey 1 (bey a) mit ihrem Log. liegt; so sucht man denn nun weiter eben so eine neue mittlere Proportionale, mit ihrem Logarithmus, zwischen c und b, und

den Log. von c und b. Also, man sucht nun weiter γcb, und dazu $\frac{\text{l.c} + \text{l.b}}{2}$.

γ) So findet man endlich hier durch die fünfte Operation γbf = g = 9; 3057204, und für deren Logarith. = 0; 96875000: welches schon um ein beträchtliches mehr ist als die gesuchte Zahl P = q.

δ) Da nun die vorhergefundene Zahl f mit ihrem Log. wiederum um etwas kleiner als q war; so muß man denn nun, weil (zufolge β) P nicht mehr zwischen g und b, sondern nur möglich zwischen f und g liegen kann, mit der Fortsetzung dieser Operation wieder zurück gehen; und also nun wieder suchen γgf und $\frac{\text{g} + \text{f}}{2}$, als den darzu gehörigen Log.; — und so immer in der fortgesetzten Operation, nach Erforderniß des Verhaltens der gefundenen mittlern Proportionale, gegen die als eine solche gesuchte Zahl P (hier = q), nach der Erheischung unter 2 d. S.

ε) Endlich hat man denn $\gamma \alpha\gamma = \delta$, und vorher $\gamma \alpha\beta = \gamma$ mit ihren Log. erhalten. Da nun nur um ein unbeträchtliches $\delta \prec$ q, und dargegen eben so $\gamma \succ$ q, so sieht man, daß man nun der Größe q ganz nahe ist, und man setzt denn weiter, und findet $\gamma\gamma\delta = \varepsilon =$ 9; 0000000, wo man denn die noch unbeträchtliche Differenz ganz für Nichts ansehen kann (2, d. S.),

und der zu $\gamma \psi \delta$ gefundene Log. $= \frac{\text{l. } \gamma + \text{l. } \delta}{2} =$

0; 95424251 kann, ohne den geringsten merklichen Fehler zu besorgen, für den Log. der Zahl q angesehen werden, weil das, was er grösser als q ist, weniger

$\frac{1}{10,000000}$

als 10,000000 beträgt.

NB. Dieses einzige Beyspiel wird uns beweisen, mit welch ausnehmenden Zeitaufwand und Mühe die Log. Tafeln haben berechnet werden müssen: doch machen uns die neuern Entdekkungen in der höhern Arithmetik, mit leichtern Berechnungen für deren Erfindung bekannt; wovon jedoch diese hier aufgestellte immer das Fundament bleiben.

Anm. Uebrigens hat man bey dieser Berechnung eigentlich nur die Log. der Primzahlen (24, c, β; 65, c, α) zu finden nöthig. Denn die Log. der aus diesen in der Natur als Produkte, oder Gradationen zusammengesetzten, ergeben sich erstere durch Addition der Log. ihrer in sich fassenden Faktoren: und letztere durch eine bloße Multiplication der Log. der für die Basis angenommenen Zahl mit der Zahl n, welche als Exponent der zu machenden Gradation gegeben ist (zufolge 76, A, β und A, a).

α) Hier also ist der Fall, wo die sogenannte Practikrechnung nützlich wird. Denn, wenn man im erstern Fall, eine Zahl, die sich ihrer Natur nach als eine zusammengesetzte characterisirt, nach den Grün-

den (65, c, λ, Anm.), und den Regeln des Practischen Zerfällens und Multiplicirens l. d. R. pag. 546 bis 552, in ihre sie gebende Faktoren zerfällt, und dieser Faktoren Log. (nach 76, A, β) addirt; so erhält man in der Summe den Log. der als ein Produkt aus diesen gegebenen Zahl. Z. B. ist 18 = 9. 2, so ist l. 18 = l. 9 + l. 2; und wenn 2880 = 24. 12. 10, so ist l. 2880 = l. 24 + l. 12 + l. 10; und ist 10400195 = 3721 × 2795, so ist l. 10400195 = l. 3721 + l. 2795 = 7; 0170415.

β) Eben so findet man im zweiten Fall, z. E. von allen Gradationen der 9, die zugehörigen Log., wenn man setzet $81 = 9^2 =$ l. 9. 2; $729 = 9^3 =$ l. 9. 3; $2187 = 9^4 =$ l. 9. 4 u. s. w. nach 76, A, a.

4) Da man aber die Log. in den gewöhnlichen Tafeln nur bis für die Zahl 10000 berechnet findet; so fragt es sich weiter: — wie man die einer Zahl m > 10000 zugehörigen Log. erfinde? —

a) Characterisirt sich die Zahl m, als eine aus mehrern Faktoren, deren Log. man alle in den Tafeln finden kann, sich ergebendes Produkt; so findet man (nach 3, Anm. α) l. m = der Summe der Log. seiner Faktoren, in welche sich m, nach den Regeln der Practik zerlegen läßt.

β) Wann sich daher irgend eine Zahl m characterisirt, daß sie entstanden aus n, multiplicirt mit einer

reinen Gradation von x, der Basis des ihr zugehörigen Zahlensystems, also, daß $m = nx$; so wird ihr Log. allemal gefunden $= l.n + l.x$; und ist $m = nx^p$; so ist also ihr Log. $= l.n + l.x^p$, d. i. $= l.n + l.p$, d. i. ihr Log. ist = der Summe der in ihr, als einem Produkt bestehenden Faktoren; nemlich, daß man die Log., welche der reinen Gradation von x zukommen, zu der Characteristik von n addirt. Wenn also nach unserm dekad. System l. 2 = 0; 3010300, so ist also

l. 20 = 2.10^1 = 0;3010300 + 1;0000000 = 1;3010300.

l. 200 = 2. 10^2 = 2; 3010300,

l. 2000 = 2. 10^3 = 3; 3010300,

l. 200000 = 2. 10^5 = 5; 3010300,

l. 200,000000 = 2. 10^8 = 8; 3010300.

b) Ergäbe sich aber m hier als Primzahl (24, c, β; 65, c, α), oder wollte man das oft mühsame Zerfällen in ihre Faktoren gar nicht versuchen: wie erfindet man in diesem Fall den log. von m, wenn m $\prec$ 10000, aber $\succ$ 10,000000, also m $\prec$ 10^4 und $\succ$ 10^7 angenommen.

Allgemein findet man, daß wenn man von zwoen Zahlen unsers Systems, welche über 1000 hinausgehen, und nur um 1 unterschieden sind, z. E. von 1815 u. 1816. die Log. aus den Tafeln nimmt, und den kleinern vom größern abzieht: wenn man ferner den Log. der kleinern Zahl 1815, auch von dem Log. der nächstfolgenden von ihr um zwo Einheiten verschie-

denen Zahl, also hier von 1817, subtrahirt; so wird der Unterschied des Log. der beiden letztern um zwo Einheiten verschiedenen Zahlen, ebenfalls beynahe doppelt so groß, als der Unterschied der Log. der zwo erstern Zahlen seyn. Man hat nemlich aus den Tafeln:

l. 1816	= 3;2591158	l. 1817	= 3;2593549
l. 1815	= 3;2588766	l. 1815	= 3;2588766
Diff.	= 2392	Diff.	= 4783

und es ist die letzte Differenz nur um $\frac{1}{10,000000}$ kleiner, als die doppelte erste, oder als 2392 . 2 = 2784. Hieraus kann man also den Schluß machen: daß die Differenzen solcher Zahlen, die nicht einmal völlig, oder höchstens um 1 unterschieden sind, sich beynahe wie die Differenzen ihrer Log. verhalten. — Bey kleinen Zahlen zwar, insbesondere bey solchen, welche unter 1000 liegen, ist, wie die Versuche belehren, dieser Satz merklich falsch: bey solchen Zahlen aber, welche über 1000 hinausgehen, kommt derselbe der Wahrheit um so näher, je größer diese Zahlen sind. Denn nimmt man z. B. die Log. von folgenden Zahlen:

l. 9876	= 3;9945811	l. 9876	= 3;9945811
l. 9875	= 3;9945371	l. 9874	= 3;9944931
Diff.	= 440	Diff.	= 880,

so wird hier schon die letzte Differenz genau doppelt so groß, als die erste. Uebrigens erstreckt sich auch hier die Wahrheit des Satzes nur bis auf 10 Milliontheilchen. Denn, wären die Log. auf mehr als sieben De-

zimalstellen berechnet, so würde man auch noch hier eine kleine Verschiedenheit bemerken. Inzwischen, da die Log. von sieben Dezimalstellen in den meisten Fällen, ohne je einen merklichen Fehler zu besorgen, gebraucht werden können (d, γ; so läßt sich auch dieser Satz, unter obiger Einschränkung, in allen diesen Fällen anwenden.

α) Daher findet man denn also mit Hülfe der Tafeln, den, einer in solchen nicht enthaltenen Zahl, zugehörigen Logarithmen, wenn solche nemlich von der unter b gesetzten Beschaffenheit, durch nachfolgendes, auf b gegründetes Verfahren:

1) Man schneidet von der gegebenen Zahl so viel Ziffern zur Rechten ab, daß nur die vier höchsten übrig bleiben, als: wenn man den für die Zahl 357859 zugehörigen Log. zu finden hätte, daß stände 3578|59; welches denn eben soviel, als ob man diese gegebene Zahl (nach 65, o, δ) durch eine Potenz von der 10. deren Exponent gleich der abgeschnittenen Ziffern Menge, dimetiirt hätte.

2) Nimmt man sowohl von dieser aus vier Ziffern bestehenden Zahl 3578, als auch von der um 1 nächst größern Zahl 3579, aus den Tafeln die Logarithmen, und sucht deren Differenz. Also, da hier l. 3579 = 3; 5537617 ÷ l. 3578 = 5536403 ist, so wird

$$\frac{1214}{\text{die Differenz} = 10{,}000000.}$$

3) Weil nun die Zahl 3578; 59 (nach 1) zwischen den Zahlen 3578 und 3579 enthalten; so schließt man nach b: — Wie sich der Unterschied der Zahlen 3578 und 3579, d. i. = 1, zum Unterschied der Zahlen 3578 und 3578; 59, d. i. = 0; 59 verhält; eben so verhält sich der Unterschied der Log. jener Zahlen,

$$\frac{1214}{\text{d. i.} = 10{,}000000}$$

zum Unterschied der Log. von diesen. Nach welcher Proportion man denn y =

$$\frac{716}{10{,}000000}$$

findet.

4) Da sonach der Log. der Zahl 3578; 59 um

$$\frac{716}{10{,}000000}$$

größer, als der Log. von 3578 ist, der Log. von 3578 aber selbst = 3; 5536403 ist; so erhält man denn 1. 3578; 59 = 3; 5536403 +

$$\frac{716}{10{,}000000}$$

= 3; 5537119.

5) Vermehrt man denn endlich (nach a) die Kennziffer dieses gefundenen Log. um so viel Einheiten als der Exponent No. 1 anzeigt, d. i. als man Ziffern abgeschnitten, also hier um zwo; so ist also 5; 5537119 der gefundene Log. für die Zahl 357859.

NB. Auf diese Auflösungsmethode gründet sich eine andere, mehr mechanische, für diese Aufgabe, welche man in der Einleitung zu den Vlacqschen Log. Tafeln von Herrn Ebert, als die erste Lösung solcher aufgestellt findet.

β) Auf b und α gründet sich nun weiter das Verfahren: mit Hülfe der Tafeln, den Log. für jede Zahl m unsers decadischen Systems, sie characterisire sich von welcher Gradation sie wolle, zu erfinden: z. B. von 35785,948375.

1) Nachdem man nemlich hier (nach α, No. 1.) die vier ersten höchsten Ziffern abgeschnitten, daß also die gegebene Zahl stehet = 3578; 5948375, so hat man von allen diesen auf das Kolon möglich folgenden Zahlen, nur die drey (594), oder höchstens vier (5948) ersten höchsten Zahlenziffern, bey der nach α No. 3 vorzunehmenden Regel de Tri zu berücksichtigen, wenn man den Logarithmus, so wie dies in den gemeinen Tafeln, nur bis auf sieben Dezimalstellen richtig haben will. Denn man erhält für den nach α No. 3 zufindenden Unterschied immer einerley, man mag auch von diesen Ziffern so viele über vier nehmen, als man will. So ist es z. B. bey der obigen Zahl ganz einerley, ob man 1 ∴ 0; 5948375 = 1214 ∴ y, oder ob man nur 1 ∴ 0; 5948 = 1214 ∴ y setzt: weil man in beiden Fällen zur vierten Proportionalzahl $y = \frac{722}{10,000000}$ erhält. Hätte man blos gesetzt, 1 ∴ 0; 594 = 1214 ∴ y, so würde man $y = \frac{721}{10,000000}$, also nur $\frac{1}{10,000000}$ zu wenig, erhalten haben. Aber auch diese Verschiedenheit würde weggefallen seyn, wenn die letzte von den vier Ziffern

5948, statt 8 blos 5, oder eine noch kleinere Zahl, die ihr vorhergehende 4 aber, 6 oder eine noch größere Zahl gewesen wäre. Die Ursache hiervon liegt darin, daß die Log. zwoer um 1 unterschiedener ganzer Zahlen, welcher über 10,000000 hinausgehen, nicht mehr in der siebenten Dezimalstelle, oder in den Zehnmilliontheilchen unterschieden sind.

NB. Von diesem Gesetz kann man sich einigermaßen überzeugen, wenn man aus der Verschiedenheit der Log. in den gewöhnlichen Tafeln analogisch auf die Log. der größern Zahlen schließt. Vergleicht man nemlich die Log. zwoer zunächst auf einander folgenden Zahlen, welche zwischen 10 und 100 liegen, gegen einander; so enthält die höchste Ziffer der Differenz, höchstens 100 Theile, wenigstens 1000 Theile: thut man eben dies bey zwoen Zahlen, welche zwischen 100 und 1000 liegen; so wird die höchste Ziffer der Differenz, höchstens 1000 Theile, wenigstens 10000 Theile enthalten: eben so wird eine auf diese Art erhaltene Differenz der Logarithmen, von zwoen Zahlen, welche zwischen 1000 und 10000 liegen, zur höchsten Zahl, höchstens 10000, und wenigstens 100000 Theile enthalten; u. s. w. Und so erhellet, daß sich zween dergleichen Log. immer in kleinern Dezimalstellen unterscheiden, je größer die ihnen zugehörige Zahlen sind. Woraus also der obige Satz zum Theil eingesehen werden kann.

2) Die weitere Auflösung ist demnach: daß man zu dergleichen großen Zahlen, welche aus mehr als 8 Ziffern bestehen, nachdem man (nach No. 1.) die vier höchsten Ziffern abgeschnitten, den Log. grade so nach den Regeln unter α sucht, als ob dieselben blos

8 Ziffern enthielten, und (nach l. l. und d, δ) blos die Charakteristik des für diese ersten acht Ziffern als gefundenen Logarithmus um so viele Einheiten vermehrt, als die vorgegebene Zahl mehr denn acht Ziffern hat. Da also hier in unserm Beyspiel der Log. von den ersten 8 Ziffern, nemlich von 35,785948 (nach α) = 7;5537125 gefunden wird; so wird also l. 35785,948375 = 10;5537125 seyn.

NB. Da diese Regel mit derjenigen, welche Herr Vega in seinen Tafeln pag. XXVI, No. 9. angiebt, einerley ist; so dienen die in der vorigen NB. gemachte Betrachtungen, zugleich zur Erläuterung derselben. — Uebrigens hat man blos bey den kleinern Tafeln das (unter α) angegebene Verfahren zu beobachten, denn bey den größern sind die dort nach No. 3. gefundene, und nach No. 4. zu addirende Unterschiede, gemeiniglich mit angegeben: wie solches aus dergleichen Tafeln, insbesondere auch aus den Vegaschen hinlänglich eingesehen werden kann.

e) Wir kommen nun zu der Bestimmung der gebrochenen Zahlen zugehörigen Logarithmen.

α) Nimmt man die Zahl 1, wie sie natürlicher Weise an sich seyn muß, wenn sie unter keine besondere Beziehung etwa gestellt wird, positiv an; so muß mithin jede Zahl a ≷ 1, als Theil einer, für eine Zahlenschrift als Gesetz angenommenen Progression, deren Exponent x ≷ 1, einen positiven Ausdruck von der in ihr enthaltenen Einheit ausdrücken, und gleich

ihr muß also auch deren Log. positiv seyn. Eben dieselbe Beschaffenheit muß es ferner auch mit gemischten Zahlen, und deren zugehörigen Log. haben, denn sie sind ja größer als Eins.

β) Wie man nun aber jede ganze Zahl, die nicht Eins, als eine reine, oder gemischte Gradation von der Basis x ihres Systems anzusehen hat; eben so auch eine gebrochene, entstanden in der Natur einer in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückten Progression, deren Exponent $x \prec 1$: und so, wie denn daher um eine dergleichen fortgehende Gradationsreihe (entsprechend 70. b, α), nothwendig in allen ihren Gliedern ein Negatives von der Einheit geben, und dieses um so mehr geben muß, von einem je höhern Grad eine in einer dergleichen Minusgradation stehende Größe sich erweiset (74. n); so müssen denn im Gegensatz von α auch alle, eigentlichen Brüchen zugehörige Log. negativ seyn. Denn die Zahlen, denen sie zukommen, drücken ihren Wesen nach, als Brüche (60. b, NB.) ein negatives von der Einheit aus.

γ) Verhielt es sich nun bey graduirten Brüchen (nach S. 74. n; u. 72. f) grade umgekehrt wie bey ganzen Zahlen, daß, je weiter man einen Bruch graduirte, er nach Maaßgabe seines Log. und dessen Verhältniß zur Einheit, immer einen um so viel mal geringern positiven Werth, und dagegen um so viel mal höhern negativen Werth erhielt, als er durch die fort-

gesetzte Gradation in größern Zahlen ausgedrückt wurde, so daß also in seinem positiven Werthe jedes $\frac{1}{x^n}$ $\gtrless \frac{1}{x^{n+1}}$ seyn muß, daß nothwendig $x^{-n} \gtrless x^{n+1}$; so ist, wenn der Log. einer ganzen Zahl (in der Annahme von α) um desto größer, je höher deren Werth, — dagegen der Log. eines Bruches um desto kleiner, je höher der in solchem enthaltene positive Werth ist: weil er als Log. einer Minusgradation von der positiven Einheit steht, und hier $x^{-n} \gtrless x^{-n+1}$ ist, so wie überhaupt bey negativen Größen jedes $-x \gtrless -x + 1$ ist (41. c).

d) Stehen eigentliche Brüche als negative Größenausdrücke von der Einheit, also nothwendig nach den Gesetzen einer fallenden Progression ausgedrückt; so muß denn auch ihr Ausdruck, so wie jede fallende Progression (nach 70. b, α), in den Gesetzen des Ausdrucks einer steigenden Progression, als dem Gesetz für den Ausdruck positiver, aus der Einheit erzeugter Größe, irgend eines und des nemlichen Zahlensystems gegründet seyn. Es ergeben sich daher denn die Log. gebrochener Zahlen, nach jedem Zahlensysteme ausgedrückt, von selbst aus denen der ganzen Zahlen dieses Systems, wenn man sie nun nur als Minusgradationen, d. i. in der Natur der Größenausdrücke, deren Log. sie sind, annimmt.

ε) Da nun (nach 60. d) in jedem Bruch, der Zähler die eigentliche Größe ist; und jeder Bruch (nach 60. a, bis f), seinem Wesen zu Folge, als ein Quotient im Verhältniß des Theils (Zählers) zu seinem Ganzen (dem Nenner) zu betrachten, und daher arithmetisch $\frac{e}{f}$ als ein Dimensionsausdruck $=$ e : f, wo aber e $\prec$ f anzusehen ist, und er eben aus dergleichen Ausdrücken auch seinen Ursprung hat; so ergiebt sich denn, daß wenn man mit dem Ausdruck $\frac{e}{f}$, in der Natur eines gegebenen Dimensionsausdruckes, logarithmisch verfährt, angenommen, daß hier $\frac{e}{f} = \frac{l.\,2}{l.\,3}$, (nach 76. A, γ; u. zu Folge S. 39. u. 40.) man erhält $\frac{e}{f} = l.\,2 - l.\,3 = -\,1.$ Daher denn das Gesetz für die Erfindung der gebrochenen Zahlen zugehörigen Logarithmen: — daß man den log. eines Bruchs erhalte in der Differenz des log. des Nenners gegen den des Zählers. Wo denn solcher sich (nach l. 1.) nothwendig als ein negativer Größenausdruck ergeben muß. Z. B. $l.\,\frac{4}{7} = l.\,4 =$ 0; 6020600 ÷ l. 7 = 0; 8450980, also $l.\,\frac{4}{7} = -$ 0; 2430380; und zwar deutet dieser Ausdruck nun (nach 76. A, γ, Nota 2) nothwendig einen Stammbruch an, d. i. einen solchen, dessen Zähler = 1 ist.

NB. Wäre die Zahl des Zählers, oder Nenners, oder beider mit ihren Log. nicht mehr in den Tafeln enthalten; so müßte man für solche (nach d. S. d, 4, a od. b) vorher die ihnen zukommende Log. suchen.

Anm. 1. Wegen der Aehnlichkeit des Wesens von Brüchen, Mensuren und Quotienten, besteht denn daher auch: daß jeder Quotient $\frac{r}{n}$, der kleiner als 1 ist, eben denselben Log. als der umgekehrte Quotient $\frac{n}{r}$, aber negativ genommen, habe. D. i.

$$l.\frac{r}{n} = -l.\frac{n}{r}.$$

Anm. 2. Also hat jeder Quotient oder Mensur $\frac{1}{n} < 1$, eben den Log. als der Dimensor oder Divisor n, aber negativ genommen; $l.\frac{1}{4328} = -l.4328$.

Anm. 3. Also hat jeder ächte Bruch eben den Log. als der umgekehrte Bruch, und jeder Stammbruch eben den Log. als der Nenner, aber negativ genommen. Z. B. $l.\frac{4}{7} = -l.\frac{7}{4}$ $= -(l.7 - l.4)$, und $l.\frac{1}{7} = -l.7$.

Anm. 4. Also ist denn auch, in Anwendung auf Dezimalbrüche, in Gemäßheit des Wesens und Ursprungs solcher (74. k u. f.) im Gegensatz von (d, 4, β) $l.\frac{1}{10^n} = -l.10^n =$ $-n$; nemlich, $l.\frac{1}{10}\left(=\frac{1}{10^{-1}}\right) = l.0;\ 1 = -1$ und $l.\frac{1}{100}\left(=\frac{1}{10^{-2}}\right) = l.0;\ 01 = -2$ und $l.\frac{1}{1000}$ $\left(=\frac{1}{10^{-3}}\right) = l.0;\ 001 = -3$ u. s. w.

NB. Entgegengesetzt von (d, δ) muß also, wenn der Log. einer ganzen Zahl kleiner als seine ihm zugehörige Zahl seyn muß, dagegen bey Brüchen, dieser um soviel mal größer seyn, als der Werth der ihm zugehörigen Zahl, um soviel mal dessen Produkt aus der Basis ausdrückt. Nach 72. i, NB.; und entsprechend β u. γ.

ζ) Wie nun nach unserm dekadischen System, (zu Folge 74. m) die positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. die Log. von 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. sind: und dagegen die Minusgradation der Einheit von der Basis 10, in den daraus entstehenden Dezimalbrüchen 0; 1 ⁘ 0; 01 ⁘ 0; 001 ⁘ 0; 0001 u. s. die ihnen zugehörige Log. — 1, — 2, — 3, — 4 u. s. w. geben; so müssen also, wenn (nach d, α u. e, α) von allen positiven, zwischen x^n und x^{n+1} fallenden Zahlen, die ihnen zugehörige Log. positive gemischte Zahlen sind, die Log. aller zwischen x^{-n} und x^{-n+1} fallenden gebrochenen Zahlen, negative gemischte Zahlen seyn. Wie nun ferner (nach d, β) der Log. jeder zwischen 1 und x fallenden positiven Zahl, ein positiver ächter Bruch, eben so muß dagegen der Log. jeder von der Einheit zwischen 1 und x^{-1} fallenden negativen Zahl, ein negativer ächter Bruch seyn.

NB. Es gehört demnach ein negat. Log. immer zu einem Bruche, dessen Zähler die Einheit, der Nenner hingegen eine Gradation von der Basis des Zahlensystems zu dem er gehört,

und dessen Exponent eben so viele positive Einheiten enthält, als der Log. negative. So gehört l. — 3 zu dem Bruche $\frac{1}{x^3}$.

α) Ist der Dezimalbruch (nach 74, r) gleich einem Bruche, dessen Nenner eine reine Minus-Gradation der 10 ist, des Grades, als die Menge der Einheiten von Ziffern für seine Zahl ausdrückt, — dessen Ziffernmenge also allemal (nach l. l.) seinen ihm gehörigen Log., als den einer reinen Minusgradation von der Basis 10 (nach d, δ) geben: und verhält sich übrigens bey Dezimalbrüchen (nach 74, 5), ausser diesem spezifischen Unterschied, alles wie bey ordinairen Brüchen; so findet man von jedem Dezimalbruch den ihm zugehörigen negativen Logarithmen, in der negativen Differenz des Log. seines Nenners von dem des Zählers (nach β und ε). Z. B. l. 0; 2703 = l. 2703 — l. 10^{-4} = 3; 4318460 — 4; 0000000 = — 1; 5681540.

NB. 1. Muß man hier den Log. des Zählers entweder aus den Tafeln, oder (nach d, 4 d. S.) suchen; so ergiebt sich dagegen der des Nenners (nach d, δ) allemal von selbst: und es ist daher am bequemsten im arithmetischen Verfahren mit logarithmischen Größenausdrücken, wenn man alle vorkommende ordinaire Brüche sogleich in Dezimalbrüche verwandelt, bevor man deren Log. sucht, wie wir dieses noch mehr beim Verfahren mit gemischten Zahlen sehen werden; obgleich aber auch nicht zu leugnen ist, daß man mit einem ordinairen Bruch, wenn er nicht anders, als durch eine große Menge von Dezimalstellen

ausgedrückt werden kann, man wohl leichter ohne diese Verwandlung verfahren mag; und selbst, wo es um große Genauigkeit zu thun ist, der Log. eines ordinairen Bruches, der sich nur durch einen unendlichen Dezimalbruch ausdrücken läßt, wirklich genauer von dem ordinairen, als von dem in einem Dezimalbruch verwandelten gefunden wird.

NB. 2. Der Kürze wegen deutet man auch oft in Rechnungen diese Vergleichung des Log. des Nenners gegen den des Zählers nur kurz an: daß man nur den Log. des Zählers setzt, und die von ihm abzuziehende Menge der Dezimalen des Log. vom Nenner blos angiebt, so wie man obiges Beyspiel l. 0; 2703 = 3; 4318460 — 4; auch ausdrücken kann, indem man nun die Differenz, als den wahren Log. leicht an sich übersehen kann. Nur muß man alsdann ganz natürlich mit dem negativen Theil in der Rechnung, nach den Gesetzen für negative Größen verfahren.

f) Weil man (nach S. 60) mit gemischten Zahlen, nachdem man sie vorher auf uneigentliche Brüche gebracht, mit diesen nun arithmetisch ganz wie mit eigentlichen Brüchen zu verfahren hat; so besteht auch hier das nemliche Verfahren, wie vorher unter e, besonders nach dem Gesetz e, ε; um den Log. für eine gemischte Zahl, oder einen uneigentlichen Bruch zu finden. Nur muß man hier bedenken, daß es sich mit dem gefundenen Log. nach e, α verhalten muß, nemlich, daß dieser hier einen positiven Größenausdruck andeutet, indem ja selbst die Differenz hier von dem Log. des Nenners, gegen die des Zäh-

lers, nothwendig an sich selbst schon als ein dergleichen sich characterisirt. Daher ist denn:

α) l. $17\frac{5}{9}$ = l. $\frac{158}{9}$ = l. 158 — l. 9 = 2; 1986571 — 0; 9542425 = 1; 2444146.

β) Eben so (entsprechend e, x), wenn die gemischte Zahl, eine, mit einem Dezimalbruch verbundene wäre. Z. E. l. 35; 27 = l. 3527 — l. 10^{-2} = 3; 5474055 — 2; 0000000 = 1; 5474055.

Da hier der Log. des Nenners als eine Minusgradation von der Basis 10 (nach d, δ), als ein Dezimalbruch ausgedrückt, in seinen bey sich habenden Nullen, durch diese nichts von der Größe der Zahl des Log. für Zähler verringern kann, ausser etwas durch den, der eigentlichen Basis 10 zukommenden Log. geschiehet; so bestehet für die Erfindung der Log. von allen mit Dezimalbrüchen verbundenen gemischten Größenausdrücken die Regel: — Man betrachtet einen dergleichen Größenausdruck als eine gegebene ganze Zahl, und sucht dafür, als für eine solche, den dazu gehörigen Logarithmus, von dessen Charakteristik man hierauf, blos den Exponenten der Gradation der 10, von dem, zu dem mit den Ganzen verbundenen Dezimalbruch gehörigen Nenner (welcher nach 74. m leicht zu finden ist) abzieht. Wenn also z. B. gegeben

wären: $3;567894 = 3\frac{567894}{1,000000}$, oder $35\frac{67894}{100000}$,

oder $356\frac{7894}{10000}$ u. f.; so ist demnach:

l. 3; 567894 = l. 3567894 = 6; 5524118,

und es wird sonach:

l. 3; 567894 = 3567894 = 6; 5524118 — l. 10^{-6}
= 0; 5524118:

l. 35; 67894 = 3567894 = 6; 5524118 — l. 10^{-5}
= 1; 5524118:

l. 356; 7894 = 3567894 = 6; 5524118 — l. 10^{-4}
= 2; 5524118:

l. 3567; 894 = 3567894 = 6; 5524118 — l. 10^{-3}
= 3; 5524118: u. f.

Wenn also eine ganze mit einem Dezimalbruch verbundene Zahl gegeben wird, welche zusammt diesem nur bis vier Ziffern besteht; so wird deren Logarithmus, als der von einer einzigen ganzen Zahl in den gemeinen Tafeln gesucht, und nun von dessen Charakteristik so viel Einheiten abgezogen, als der beystehende Dezimalbruch Ziffern hat, d. i. man zieht von der Charakteristik des gefundenen Logarithmen, als des für die angenommene ganze Zahl, den Exponenten der Gradation der 10, von dem, zu dem mit den Ganzen verbundenen Dezimalbruch gehörigen Nenner ab, wie wir vorher demonstrirt haben. Wenn so z. B. zu finden gegeben wäre der Log. von $3\frac{567}{1000}$, oder

$35\frac{67}{100}$, oder $356\frac{7}{10}$; so sucht man nur in den Tafeln:

l. $3567 = 3;5523031$, und so ergiebt sich denn:

l. $3;567 =$ l. $3567 = 3;5523031 -$ l. 10^{-3}

$= 0;5523031$,

l. $35;67 =$ l. $3567 = 3;5523031 -$ l. 10^{-2}

$= 1;5523031$,

l. $356;7 =$ l. $3567 = 3;5523031 -$ l. 10^{-1}

$= 2;5523031$.

Hier sehen wir freylich, welchen Vortheil es gewährt, wenn man in dergleichen arithmetischen Forderungen (nach e, k, NB.), statt mit ordinairen Brüchen, lieber mit Dezimalbrüchen verfährt.

Anm. Noch müssen wir aber hier anmerken: Sollte in dem Falle unter α, nicht nur der Zähler, sondern auch sogar der Nenner, eines solchen, aus einer gemischten Zahl erhaltenen ordinairen uneigentlichen Bruches so groß werden, daß die Log. derselben nicht mehr in den Tafeln anzutreffen wären, wie dies der Fall bey der Zahl $3725\frac{2714}{32157}$, oder bey $\frac{119787539}{32157}$ ist; so verfährt man entweder nach d, 4. b, α, oder aber, sowohl kürzer, als auch richtiger nach folgender Methode. Man sucht erstlich blos den Log. der gegebenen ganzen Zahl, hier von 3725, desgleichen auch den Unterschied dieses Log. vom Log der nächst größern Zahl (3726), wo man also hier findet $=$ $3;5711263 \div 3;5712429 = 1166$. Alsdann schließt man wie l. l. aus den Gründen d, 4, b: — wie sich 1 (als der Unterschied der beiden nächsten Zahlen 3725 u. 3726), zu

dem mit der ganzen Zahl verbundenen Bruch $\frac{2714}{32157}$, (als dem Unterschied der beiden Zahlen 3725 und $3725\frac{2714}{32157}$) verhält; eben so verhält sich 1166 (als der Unterschied der Log. von jenen Zahlen) zu y, (als den Unterschied der Log. von diesen). Hier findet man $y = 252$. Diese gefundene vierte Proportionale addirt man zum Log. der gegebenen ganzen Zahl; so erhält man dadurch den verlangten Log. von der gegebenen gemischten Zahl. Also im gegenwärtigen Fall $l.\ 3725\frac{2714}{32157}$ $= l.\ 3;5711263 + 252 = 3;5711515$.

Wäre eben in diesem Fall, der angehängte Bruch, ein Dezimalbruch, wie z. B. wenn man den Logarith. von 25;36417 verlangte; so sucht man nach d, 4, b, α, denselben eben so, als ob der Bruch (nach f β) mit zu den Ganzen gehörte; schneidet aber von der Charakteristik soviel Einheiten ab, als die vorgegebene Zahl Dezimalstellen enthält. Also da

$l.\ 25{,}36417 = 6;4042206$; so wird

$l.\ 25;36417 = 1;4042206$ seyn.

Satz 79. Der Erfindung für den einer Zahl eines gewissen Systems zugehörigen Logarithmus, steht entgegen die Erfindung der zu einem gegebenen Log. zugehörigen Zahl von einem gewissen System. Welcher Forderung Auflösung, als die umgekehrte von der unter 78. d, e, u. f, also ganz natürlich in ersterer gegründet seyn muß.

Wir kommen also nun zu dem zweeten Theil der Exponentiation, nemlich der Erfindung der zu einem gegebenen Log. zugehörigen Zahl eines gewissen Systems.

a) Die Charakteristik des Log. zeigt uns hier, von welch einer Gradation der angenommenen Basis von dem Zahlensystem (nach 78. d, δ), die ihm zugehörige Zahl von solchem sey, welch eine wievielziffrige, dieser ihrer durch die Charakteristik angezeigten Gradation ihrer entsprechend, sie (nach l.l.) seyn müsse. Also von jedem Log. dessen Charakteristik = o, ist die zugehörige Zahl eine einfache, und von jedem Log. dessen Charakteristik = n, eine n+1fach zusammengesetzte vielziffrige Zahl. D. i. Ein Log. dessen Charakteristik z. B. = 3, giebt eine vierziffrige ihm zugehörige Zahl; und die dahinter stehende Mantisse, zeigt (nach 78. d, ζ), ob diese Zahl eine reine, oder gemischte Gradation des dritten Grades, oder überhaupt nten Grades von der Basis x des Systems sey. Ganz mechanisch findet man daher in den gemeinen Tafeln die jedem Logarithmus, dessen Charakteristik nicht über die Zahl 3 ist, zugehörige ganze positive Zahl.

b) Alleine, da man im Dimensions- und Degradationsverfahren sehr oft auf gebrochene Größenausdrücke kommt; so siehet man leicht ein, daß wenn man diese arithmetischen Forderungen logarithmisch (nach

76. A, γ u. 76. A, 2, α) verrichtet, man in den erhaltenen Differenzen und Mensuren oft auf solche logarithmische Ausdrücke kommen müsse, die man sonach, weil die Tafeln nur auf positive ganze Zahlen berechnet seyn können, in solchen nicht finden wird. Um daher für irgend einen in den Tafeln, sey's dieser angeführten Ursache, oder seiner solche überschreitenden Größe wegen, nicht genau, oder nicht zu treffenden Logarithmus, die ihm zugehörige Zahl zu finden, unterscheidet man drey Fälle.

1) Zu einem in den Tafeln nicht enthaltenen Log., dessen Charakteristik = 3, dessen zugehörige Zahl also zwischen 1000 und 10000 fällt, diese ihm zugehörige Zahl zu finden. Z. B. zu dem Logarith. 3; 7589982.

In den Tafeln findet man hier für die beiden sich natürlich nächstfolgende Zahlen

l. 5741 = 3; 7589875 und

l. 5742 = 3; 7590632 als den nächst kleinern und nächst größern von dem gegebenen, welches also ein Zeichen ist, daß die für den Log. 3; 7589982 gehörige Zahl, als eine gemischte zwischen 5741 und 5742 fallen müsse, da (nach 77. b, NB.) eine zwischen zwo nächste Größen fallende mittlere nothwendig eine gebrochene seyn muß; daß ihr also ausser der Zahl 5741 auch noch ein gewisser Theil von der nächstfolgenden Einheit zukommen müsse. Man vergleicht denn

also daher diese beide in den Tafeln vorkommende Logarithmen, als den nächstgrößern, und nächstkleinern von dem gegebenen, und deren zugehörige Zahlen mit einander, und bestimmt deren Differenz, also:

A	C
3; 7590632	= l. 5742
3; 7589875	= l. 5741

Diff. = 757 Diff. = 1; und eben so sucht man auch die Differenz zwischen dem gegebenen, und dessen nächstkleinern Log. in der Tafel selbst, giebt hier:

B	
gegebene Log.	3; 7589982
÷ nächstkleinern Log.	3; 7589875

Diff. = 107; nun schließt man: wie sich die Differenzen der Log. A ⁘ B verhalten; eben so verhalten sich auch die Differenzen der Zahlen C ⁘ y, zu denen sie gehören. Also: 757 ⁘ 107 = 1 ⁘ y = $\frac{107}{757}$ = 0; 141..... Diese gefundene vierte Proportionale zur Zahl des in der Tafel gefundenen nächstkleinern Log. vor dem gegebenen addirt, giebt die für den gegebenen Log. gehörige, oder doch wenigstens nächstentsprechende Zahl. Also ist hier 3; 7589982 = l. 5741; 141.

2) Zu einem Log. dessen Charakteristik weniger als 3, also = 2, oder 1, oder = 0 ist, die zugehörige Zahl zu finden. Z. B. zu 1; 5734518.

Weil (nach 78. d, 4. β) die Log. aller Zahlen unsers Systems, welche zwischen 1 und 1000 liegen, wenn man nemlich auf die Charakteristik nicht achtet, sondern nur auf die Mantisse siehet, auch unter den Log. der Zahlen zwischen 1000 u. 10000 wieder vorkommen, aber nicht eben so umgekehrt; so kann der vorgegebene Log. unter denen von der Charakteristik = 3 genau angetroffen werden, wenn derselbe unter den Log. von der Charakteristik = 0, oder 1, oder 2 nicht genau gefunden wird.

Die Zahl, welche man nun hier der Mantisse des gegebenen Log., mit Beyseitesetzung der Charakteristik, entsprechend findet, giebt die dem gegebenen Log. zukommende: wenn man sie selbst nemlich (zu Folge 78. f, β) mit der Gradation von der 10, als die Differenz von der Charakteristik des gegebenen Logarithmus, und der Charakteristik = 3 von der gefundenen Zahl beträgt, dimetiirt. D. h. war die gegebene Charakteristik = 0, also mit 10^{-3} oder mit 1000; war diese = 1, also dimetiirt mit 10^{-2}, oder mit 100; und war solche = 2, also dimetiirt mit 10^{-1}, oder mit 10; d. i. man muß drey, zwo, oder eine Ziffer von der Rechten gegen die Linke von ihr (nach 65. c. δ) abschneiden: wo denn die vor dem Kolon stehende Zahl, die Ganzen, und die nach solchen, den mit solchen noch verbundenen Dezimalbruch (nach 74. l. u. m) der Zahl geben, welche zu diesem Log. nach unserm System gehört. Denn, daß solche eine ge-

mischte seyn muß, ergiebt sich aus den nemlichen Gründen unter dem ersten Fall d. S., da man diesen Log. unter denen von dieser Charakteristik, nur als zwischen zween andere fallend finden kann. — Man findet also unsern gegebenen Log. 1; 5734518 = l. 3745; weil nun seine Charakteristik = 1; so ist also die ihm zukommende Zahl = $\frac{3745}{100}$ = 37; 45. Denn 1; 5734518 = 3; 5734518 — 2 = 1; 5734518 = l. $\frac{3745}{100}$ = l. 37; 45 (zu Folge 78. f, β). — Also ist 2; 5734518 = l. 374; 5 und 0; 5734518 = l. 3; 745.

NB. Sollten aber die gefundene Dezimaltheile der Aufgabe noch nicht Genüge leistend seyn; so kann man solche weiter, durch Befolgung der Regeln des ersten Falles, noch genauer finden, als man es nur je zu einer Absicht nöthig haben mag.

3) Zu einem in den Tafeln nicht enthaltenen Logarithmus, dessen Charakteristik größer als 3, die ihm zugehörige Zahl unsers Systems zu finden.

Wie im zweeten Fall, suchet man auch hier, mit Beyseitesetzung der Charakteristik, unter der Charakteristik 3, eine der des gegebenen Log. entsprechende Mantisse.

α) Findet man nun hier die des gegebenen selbst genau, wie von dem z. B. gegebenen 6; 9298275, als welches log. Mantisse, ohne Rücksicht seiner sowohl gegebenen, als gefunden vorstehenden Charakteristik, jetzt die Mantisse des log. von der Zahl 8508 ist; so ist dieses ein Beweis, daß des gegebenen log. zugehörige Zahl (nach 78. d, 4, β) aus der Zahl des gefundenen log. selbst, multiplizirt mit einer reinen Gradation von der Basis 10, des Grades, als die Differenz zwischen der Charakteristik des gefundenen (= 3), und der des gegebenen anzeigt, entstanden sey: und man findet also nun in diesem Fall sehr leicht die dem gegebenen log. entsprechende Zahl, wenn man nun nur umgekehrt wie vorher unterm zweeten Fall verfährt: daß man nemlich die in der Tafel so gefundene Zahl mit dieser benannten Gradation der Basis 10 multiplizirt, d. i. daß man, nach dem Gesetz der Multiplication mit 10, 100 u. f., dieser Zahl zu Rechten so viele Nullen anhängt, als die Einheit der Differenz zwischen der Charakteristik des log. der gefundenen Zahl (= 3), und der des gegebenen log. beträgt. Da man nun hier gefunden l. 8508 = 3; 9298275 ÷ 6; 9298275 = 3 Diff.; so ist also 6; 9298275 = l. 8508000. Denn es ist 6,9298275 = 3; 9298275 + 3 = l. 8508 ⋈ 1000 (weil 3 = l. 1000 ist) = l. 8508000 (78. d, 4, β).

β) Findet man aber die Mantisse des gegebenen log. nicht genau in den Tafeln, sondern nur als zwi-

schen zwo fallend; so ist dies nach vorigen zweeten Fall ein Beweis, daß die zugehörige Zahl eine gemischte, also eine ganze, mit einem noch bey sich habenden Bruche, seyn müsse. Z. B. 4; 5524118, welches log. Mantisse zwischen 3; 5523031 = l. 3567 und 3; 5524248 = l. 3568 fällt: der gegebene log. gehört also zu einer Zahl, deren erste vier Ziffern (nach dem ersten Fall d. S.) = 3567 seyn müssen.

Nach den Gründen (von l. l.) verfährt man nun weiter, daß man des gefundenen nächst kleineren log. Mantisse mit der des gegebenen vergleicht, und zu der gefundenen Differenz so viele Nullen hinzusetzt, als man auf viele Dezimalstellen den log. berechnet gegeben hatte. Weiter sucht man denn auch die Differenz zwischen den in den Tafeln gefundenen zween Logarithmen, dem nächst größern und nächst kleinern vor dem gegebenen (hier 5524248 ÷ 5523031 = 1217 Diff.), mit welcher gefundenen letztern Differenz man das vorher erhaltene Produkt aus der Differenz des gegebenen log. mit dessen gefundener nächst kleinerer Mantisse × 10^n (hier 1087000) dimetiirt, und die erhaltene Mensur (hier 894) der, dem in der Tafel gefundenen nächst kleinern log. zukommenden Zahl anhängt, (welches hier also die Zahl 3567894 giebt).

Von dieser gefundenen Zahl schneidet man endlich durch das Kolon (nach 78. f, β) so viele Ziffern gegen die Linke für die Ganzen der zu erfindenden Zahl ab,

als deren für solche nach Erforderniß der gegebenen Charakteristik (zu Folge 78. d, δ, d. i. n + 1) seyn müssen; und so findet man denn endlich hier, daß sei 4; 5524118 = l. 35678; 94.

Welches endliche Verfahren unter β, denn wiederum auf den, für den Fall unter α beruhet: und die Rechnung stehet sonach:

$$4; 5524118 \div \beta; 5523031 = 1087 : 1000 = \frac{1087000}{1217} = 894,$$

giebt also 4; 5524118 = l. 35678; 94.

Zusatz. Sollte aber die Charakteristik des gegebenen Log. größer als die Zahl 6 seyn; so lassen sich nach dieser Methode blos die ersten sieben Ziffern der gesuchten Zahl, und nicht mehrere richtig angeben.

Denn gesetzt die Kennziffer eines solchen Log. sey die Zahl 7; so wird (nach 78. d, δ) die zugehörige Zahl schon aus 8 Ziffern bestehen. Aber die Log. zwoer aus 8 Ziffern bestehenden, und nur um Eins verschiedener Zahlen, sind nicht mehr in den Zehnmilliontheilchen, oder in der siebenten Dezimalstelle verschieden (78. d, 4, b, β); folglich läßt sich auch nicht bestimmen, welcher von zwoen solchen Zahlen ein dergleichen gegebener Log. zugehöre. Also, da sowohl l. 10000001, als auch l. 10000000 = 7; 0000000 = 7 ist; so kann man hier schon nicht mehr entschei-

den: ob zu dem gegebenen Log. 7; 0000000, die Zahl 10000001, oder 10000000 gehört.

Wäre die Kennziffer des gegebenen Log. = 8, also daß demselben eine aus 9 Ziffern bestehende Zahl zugehörte (78. d, δ); so läßt sich hier noch viel weniger die zugehörige Zahl, auf mehr, als die sieben ersten Ziffern bestimmen, weil die Log. zwoer dergleichen um 1 unterschiedener Zahlen, sich sogar noch in der achten Dezimalstelle gleich bleiben.

Da also in diesen Fällen sich nichts gewisses bestimmen läßt; so sucht man zu jedem Logarithmus, dessen Charakteristik größer als 6 ist, die Zahl grade so, als ob solche nur = 6 wäre, und hängt alsdann blos an die gefundene Zahl, für jede Einheit, welche die Kennziffer mehr als 6 enthält, eine Null an (78. d, 4, a). Wenn also nach dem vorigen dritten Fall d. S. dem Log. 6; 7258403 die Zahl 5319126 zukommt; so wird dem Log. 8; 7258403 die Zahl 531912600 zugehören, u. s. f. Dieses ist also grade das umgekehrte Verfahren von S. 78. d, 4, b, β; wie solches auch nach S. 78. d, 4, b erfordert wird.

Man sollte zwar glauben, daß, weil sich der Bruch $\frac{103}{816}$ in dem Dezimalbruch 0; 12621 verwandelt, man für die Charakteristik = 8 des Logarithmen

3; 7258403, (wenn man dessen zugehörige Zahl nach dem ersten Fall dieses Satzes findet =

l. 5320 ÷ l. 5319 ⁘ 3; 7258403 ÷ l. 5319 = 1 ⁘ y

d. i. 816 ⁘ 103 = 1 ⁘ y,

wo $y = \frac{103}{816} = 0;126\ldots$ wird, und also für seine zugehörige Zahl (nach l. l.) $= 5319\frac{103}{816} = 5319;126$ .... giebt) man die Zahl 5319126211 erhalten würde: allein, da bey dieser großen Zahl, sowohl an dem Zähler, als an dem Nenner noch zwo Ziffern angehängt seyn sollten; (weil sich die Log. dieser großen Zahl erst in der neunten Dezimalstelle ungleich werden) so würde dadurch der Werth des Bruches ganz anders ausfallen; mithin auch der ihm gleiche Dezimalbruch sich verändern, und also hieraus nichts zuverlässiges bestimmt werden können.

c) Zeigt (nach S. 78. e, β in Vergl. l. l. α und unter f) ein negativer logarithmischer Größenausdruck, nicht nur allemal einen eigentlichen Bruch, sondern überdies auch noch (nach l. l. ε) nothwendig jedesmal einen Stammbruch an, dessen Zähler = 1 ist; so kann auch ein dergleichen negativer logarithmischer Ausdruck, nie eine andere, ihm entsprechende Zahl haben, als eine gebrochene, deren Zähler = 1.

Soll man daher zu einem gegebenen negativen Logarithmen den ihm zugehörigen Bruch finden; so ist die Aufl.

Entsprechend (78. e, d) sucht man nemlich den gegebenen log. in den Tafeln grade so auf, als ob derselbe positiv wäre; so ist die dazu gehörige Zahl der Nenner, und 1 der Zähler des verlangten Bruches: den man alsdann nach Belieben in einem Dezimalbruch verwandeln kann. Denn es ist überhaupt l. $\frac{1}{n}$ = l. 1 — l. n (78. e, ε), = 0 — l. n = — l. n (78. a bis d): Mithin auch umgekehrt, die Zahl von — l. n = $\frac{1}{n}$. Wenn also der gegebene log. — 3; 2240148 ist; so wird der ihm zugehörige Bruch = $\frac{1}{1675}$. Denn l. $\frac{1}{1675}$ = l. 1 — l. 1675 = — 3; 2240148. Eben so wenn — 1; 4732105 gegeben wird; so ist der gesuchte Bruch = $\frac{1}{2,973106}$ = $\frac{100000}{2,973106}$ = 0; 03363 beynahe.

α) Oder, will man diesen Bruch sogleich in der Form eines zehntheiligen finden; so setze man ihn = 100000, da der Nenner eines solchen Bruches eine 1, mit jeder beliebigen Menge von Nullen (78 c, d) seyn kann. Wäre z. B. — 1; 2709352 der gegebene Logarithmus; so hat man denn den Zähler dieses Dezimalbruches zu suchen: und sey dieser einstweilen = y; so ist $\frac{y}{100000}$ der Bruch, welcher zu dem gegebenen

Log. gehört, und daher l. $\frac{y}{100090} = -1;2708352$.

Aber $\frac{y}{100000} \times 100000 = y$; also

l. $\frac{y}{100000}$ + l. $100000 =$ l. $y = -1;2708352$ +

$5 = 5;0000000 - 1;2708352 = 3;7291648$

$=$ l. 5360. Folglich $y = 5360$, und daher $\frac{5360}{100000}$

$= \frac{536}{10000} = 0;0536$ der Dezimalbruch, welcher zu dem Logarithmus $-1;2708352$ gehört.

Satz 80. In dem Verfahren mit Logarithmen, in dem verhältnißmäßigen Verfahren mit Größen, statt der Zahlen selbst, für deren Log. sie sich, nach einem gewissen angenommenen Zahlensystem erweisen, verwandeln sich zur großen Erleichterung, nicht nur die Multiplication in eine bloße Addition, die Dimension in eine Subtraction, und die Gradation und Degradation in eine simple Multiplication und Dimension (nach 76. A, β, γ u. A, a, α); sondern man ist lediglich auch nur durch das logarithmische Verfahren im Stande, zu erforschen: „die vielvielste Gradation einer Größe von einer andern, für die Basis ihrer Gradation angenommen sey: oder, zur wievielsten Dignität irgend eine Größe erhoben werden müsse, um einer andern gegebenen

gleich zu werden; als welches sich durch keine andere arithmetische Operation ausmitteln läßt, und ohne welches doch in den Verhältnißprogressionen nie die Zahl der Glieder n, mithin auch nicht die Zahl der gleichen Verhältnisse n — 1, welche sie enthält, bestimmt werden kann."

Was diesen dritten Theil der Exponentiation, nemlich das Verfahren mit logarithmischen Größen, statt der Zahlen selbst, welchen sie nach irgend einem festgesetzten Zahlensystem, als deren Log. zukommen, in verhältnißmäßigen Operationen mit Größen betrift; so haben wir sowohl schon (l. l.) dieses Verfahren selbst, als auch dessen Grund gezeiget: daß wir hier nur noch zu dem ersten Theil unsers Satzes, einige erläuternde Anmerkungen beyzubringen haben.

α) Wenn man in dem gegebenen Ausdrucke a ≍ b findet, l. a = v und l. b = y; so ist a ≍ b = l. v ✢ l. y. Heißt nun l. v ✢ l. y = d; so darf man nur d unter seiner Charakteristik in den Tafeln nachschlagen, wo denn die l. d zukommende Zahl, (nach 76. A, β) nothwendig gleich ist dem gesuchten Produkt a . b.

Oder überschritte l. d schon die Gränzen der Tafeln; so müßte man nach den Gesetzen S. 79. die l. d zukommende Zahl erfinden.

β) Behalten wir diese Ausdrücke bey, so giebt a : b = l. v — l. y. Wäre nun l. v — l. y = l. d Diff.; so ist wiederum die für l. d in den Tafeln gefundene Zahl, (nach 76. A, γ) nothwendig die gesuchte Mensur von a : b.

Da man aber (nach 79. b) hier oft zu der log. Größe = d, einen Ausdruck erhalten wird, welchen, wenn er auch die Tafeln nach seiner habenden Charakteristik nicht überschreitet, man in solchen doch nicht selbst, sondern nur, als zwischen zween andere fallend finden wird; so hat man dabey zu beobachten:

1) Ist in dem Ausdruck a : b, hier a ≺ b; so muß auch nothwendig seyn l. a ≺ l. b, also es muß seyn v ≺ y, und sonach die gefundene Diff. l. d (nach 79. c) nothwendig negativ, und als solche einem ächten, und zwar einem Stammbruche zugehörig seyn: und dieser ihm zugehörige ächte Bruch, der also ein Stammbruch ist, muß sodann (nach 79. c) mit Hülfe der Tafeln zwischen seinen zween nächsten Logarithmen, unter der Charakteristik = o gesucht werden.

2) Giebt dagegen ä : b, angenommen a b, wo also auch nothwendig l. a ≻ l. b, also v ≻ y seyn muß, l. v — l. y = l. d einen logarithmischen Ausdruck, den man in den Tafeln nicht findet, ohnerachtet dessen Charakteristik deren Gränzen nicht überschreitet; so charakterisirt sich solcher einmal (nach 78. e) immer

als ein positiver logarithmischer Ausdruck, der als solcher (nach l. l.) immer wenigstens eine ganze Einheit enthalten muß, wenn auch seine Charakteristik = o sey. Da er aber nun als ein solcher Ausdruck nothwendig in den Tafeln, zwischen zween ihm nächste andere Log. fallen muß; so muß er also auch nothwendig in seiner ihm zukommenden Zahl, für die Mensur von a : b (nach 79. b, 1.) eine gemischte Zahl geben, welche man denn nun nach 79. b, 1. u. 2. zu bestimmen hat.

3) Wäre aber endlich die gefundene log. Diff. d, für die Mensur von a : b, ein solcher log. Ausdruck, dessen Charakteristik schon die Gränzen der Tafeln überschreitet; so siehet man leicht, daß die d entsprechende Zahl (nach 79. b, 3) zu bestimmen sey.

Nota. Es ist also, wie schon erwiesen worden, der Log. eines Produkts gleich der Summe der Log. der solches gebenden Faktoren: und der Log. einer Mensur, gleich der Differenz der Log. des Dimensors gegen das Dimetiendum.

γ) Nach S. 76. A, a erhält man jede Gradation einer als Basis für solche angenommenen Zahl a, wenn man den Log. von der angenommenen Basis a, mit der Zahl multiplizirt, die den Grad anzeigt, auf welchen a erhoben werden soll, d. i. mit dem Exponenten der Gradation.

Wenn wäre also l. a = v, und a sollte zur yten Gradation erhoben werden; so erhielte man a = l. v ✕ y.

Der log. einer Gradation vom Grade m ist daher mmal so groß als der log. der Basis: oder, es ist l. a^m = m log. a. Denn es ist log. a^m = l. a . a . a . a ....; wo a so oft Faktor ist, als m Einheiten enthält (72. a, β); mithin l. a^m = l. a + l. a + l. a + ... (β, Nota), wo also l. a ebenfalls mmal zu sich selbst addirt, d. h. mit m multiplizirt werden muß (53. 54.), — also für l. a^m der Ausdruck m log. a erhalten wird.

Demnach ist l. a^2 = 2 log. a, und l. a^3 = 3 log. a, d. i. der log. der Quadratzahl ist doppelt, und der log. der Kubikzahl ist dreymal so groß, als der log. von der Basis.

Man bekommt also den log. des Quadrats einer Zahl, wenn man ihren log. durch 2 multiplizirt: den log. ihres Kubus, wenn man ihren log. durch 3 multiplizirt: und überhaupt den log. ihrer nten Gradation, wenn man ihren log. durch n multiplicirt; d. i. l. v^2 = 2 l. v; l. v^3 = 3 l. v u. s. l. v^n = n l. v. So ist l. 4^2 = 2 l. 4, l. 4^3 = 3 l. 4 u. s. w.

Denn da (nach 72. a, β) v^2 = v . v, v^3 = v . v . v, v^n = v . v . v . v . v....; so ist l. v^2 = l. v +

l. v , l. v^3 = l. v + l. v + l. v ; also bekommt man überhaupt l. v^n, wenn man l. v , nmal zu sich selbst addirt, d. i. durch n multiplizirt, mithin ist l. v^n = n l. v.

δ) Will man dagegen umgekehrt aus einer Zahl n, die Basis eines gewissen Grades erfinden; so muß man logarithmisch (nach 76. A, a, α) den der Zahl n zugehörigen Log. durch den Exponenten des Grades, auf den n degraduirt werden soll, dimetiiren.

NB. Wird man hier so bey diesem Verfahren des Degradirens am Ende auf negative Logarithmen, oder auf solche geführt, die man in den Tabellen nicht findet; so hat man mit solchen denn endlich wie unter (β d. S.) zu verfahren, um deren entsprechende Größe zu bestimmen.

Es ist also daher der Log. der Basis eines Quadrats die Hälfte vom Log. der Quadratzahl: der Log. der Basis vom Kubus, der dritte Theil vom Log. der Kubikzahl: und überhaupt der Log. der Basis von einer Zahl vom Grade m, gleich $\frac{1}{m}$ vom Log. der Gradation. D. h. es ist log. γ a = $\frac{1}{2}$ l. a; log. $\sqrt[3]{\gamma}$ a = $\frac{1}{3}$ l. a; und log. $\sqrt[m]{\gamma}$ a = $\frac{1}{m}$ l. a. Denn, wenn x^m = a; so ist x = γ a, (da gleiche Urgrößen gleiche Gradationen, und ungleiche ebenfalls dergleichen Grada-

tionen nothwendig geben; und es sich auch so mit den Urgrößen der Gradationen verhalten muß) und m log. $x = l.\ a\ (\gamma)$; folglich, wenn man die zween letztern gleiche Ausdrücke mit m dimetiirt, $\log.\ x = \frac{l.\ a}{m}$ (61.); oder statt x, seinen Werth $\sqrt[m]{a}$ gesetzt, $\log.\ \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log.\ a.$ — Ueberhaupt ist $\log.\ a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}$ l. a, denn $\log.\ a^{\frac{m}{n}} = l.\ \sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{n}\ l.\ a^m$, wie wir eben gesehen; und $\frac{1}{n}\ l.\ a^m = \frac{1}{n} .\ m \log.\ a\ (\gamma)$: mithin $l.\ a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n} .\ m .\ l.\ a = \frac{m}{n} .\ l.\ a.$

Also bekommt man den Log. der Quadratbasis einer Zahl, wenn man den Log. der Zahl durch 2 dimetiirt; den Log. der Basis ihres Kubus, wenn man ihren Log. durch 3 dimetiirt; und überhaupt den Log. ihrer Basis vom nten Abgrad, wenn man ihren Log. durch n dimetiirt. D. i. $l.\ \sqrt{m} = \frac{1}{2}\ l.\ m$, $l.\ \sqrt[3]{m} = \frac{1}{3}\ l.\ m$, $l.\ \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n}\ l.\ m.$ Z. B. $l.\ \sqrt{16} = \frac{1}{n}\ l.\ 16$, $l.\ \sqrt[3]{16} = \frac{1}{3}\ l.\ 16$, $l.\ \sqrt[n]{16} = \frac{1}{n}\ l.\ 16.$ — Denn man setze $\sqrt[n]{m} = v$; so ist $m = v^n$, folglich $l.\ m = n\ l.\ v\ (\gamma)$, also $\frac{l.\ m}{n} = l.\ v$, d. i. $l.\ \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n}\ l.\ m.$

Nota 1. Will man also nach der gewöhnlichen Rechenmeister-Methode (66. f), nach der Formel der Regel de Tri, die vierte Proportionalgröße finden, so darf man nur von den gegebenen drey Größen, der zwoten und dritten Log. addiren, und von dieser erhaltenen Summe, den der ersten subtrahiren, so giebt hier die Differenz den Log. der gesuchten vierten, dessen zugehörige Zahl, man denn nun aus den Tafeln, oder nach S. 79. zu finden hat.

Nota 2. Die mittlere Proportionale zwischen zwoen Zahlen findet man daher logarithmisch: wenn man die Summe der Log. der gegebenen beiden Zahlen (nach ♪) halbirt, wo die gefundene Mensur den Log. der gesuchten mittlern Proportionale giebt, mit welchem man nun wie unter dem ersten Fall zu verfahren hat.

Was den zweeten Theil unsers Satzes betrift; so haben wir über solchem nichts weiter zu erinnern, als daß wir ihn nur durch einige Beyspiele erläutern. Als:

Zu finden, die vievielste Gradation von m eine gegebene Zahl r sey, d. i. in der Gleichung $m^x = r$ den Exponenten x zu finden.

Man dimetiirt l. r durch l. m; so hat man x.

Denn, wenn $x = \frac{l.\,r}{l.\,m}$ ist; so ist $x\,l.\,m = l.\,r$, also $m^x = r$. (nach α, β, γ u. δ, d. S.)

Z. B. Die wievielste Gradation von 3 ist 6561?

$x = \frac{l.\,6561}{l.\,3} = \frac{3;\,8169700}{0;\,47711213} = 8$, also die achte Gradation von der 3.

Eben so daher, aus gleichen angeführten Gründen, dieselbe Auflösung, wenn gefunden werden soll: im wievielsten Abgrad von n, eine gegebene Zahl p sey, d. i. in der Gleichung $\sqrt[x]{n} = p$, den Exponenten x zu finden.

Man dimetiire nemlich l. n durch l. p, so hat man x. Denn, wenn $x = \frac{l.\,n}{l.\,p}$; so ist $x\ l.\,p = l.\,n$, folglich $l.\,p = \frac{l.\,n}{x}$, also $p. = \sqrt[x]{n}$.

Z. B. Der wievielste Abgrad von 6561 ist die Zahl 3? —

$$x = \frac{l.\,6561}{l.\,3} = 8.$$

Man soll $\sqrt[4]{\frac{7364^3}{5499^2}}$ finden. Es möge die zu erfindende Basis = R, und die Zahl, aus der sie gefunden werden soll = P heissen. Die Aufl. stehet:

l. 7364 = 3; 86711138

× 3

= 11; 6013414

÷ 2 l. 3469 = 7; 4805674

l. P. = 4; 1207740

dimet. mit 4 = l. R = 1; 0301935 diesen l. R. unter der Charakteristik 3 aufgesucht, giebt

R = 10; 72.

Man verlangt diejenige Gradation der 2, welche 8192 giebt.

Oder es sey $2^x = 8192$, so ist x l. 2 = l. 8192 (γ) also

$$x = \frac{\text{l. } 8191}{\text{l. } 2} = \frac{3;\ 9133899}{0;\ 3010300} = 12;\ 99.$$

(Man vergleiche Kästner, Kap. VI. S. 33.)

Anm. den Autor betreffend. Weitläuftiger, als eigentlich Plan und Zweck dieses Buches, laut seiner Ueberschrift, forderten, habe ich mich bey der S. 78, 79 u. 80 verhandelten Lehre von der Exponentiation aufgehalten, um, bevor noch meine, von dem biedern B. öffentlich gewünschte höhere Arithmetic auskommt, — da die Provinzen, für welche ich eigentlich mein L. d. R. schrieb, mich in die dazu erforderliche und vom Rezensenten öffentlich mir gewünschte Lage zu setzen, noch nicht für gut befunden haben: und ein gewisser Apostolischer Mann, solches gelegentlich sogar zu verhindern, vor der Hand seinem literärischen Gewissen und vorgeblichem Patriotismus angemessen befunden hat — doch einigermaßen den lauten Wünschen des Herrn Rezensenten zu begegnen, und denen, die sich meines

L. d R. bedienen, solches, durch diesen dort noch mangelnden Artikel, auch noch nützlicher zu machen. Daher ich mich denn auch hier wiederum möglichst nur auf das nothwendigste über diese Lehre eingeschränkt, da solche ganz zu umfassen, mich zu weit von dem vorgeschriebenen Plane dieser Schrift abgeführt haben würde.

Satz 81. Wenn die Addition und Subtraction, die Größerung und Kleinerung eigenthümlicher Größen, als die eigentlichen ursprünglichen einzigen Größenmodificationen; und die von diesen abgeleitete Multiplication und Dimension, das verhältnißmäßige Größern und und Kleinern eines Größenausdruckes: und die aus solchen sich wiederum ergebende Gradation und Degradation, nebst der mit solchen verbundenen Exponentiation, als die Fundamentalmodificationen aller möglichen Größenmodification sich erweisen, auf welche die Auflösungen aller nur möglichen Rechnungsforderungen, sowohl der niedern und gemeinen, als der höhern Arithmetik gegründet sind, und nur seyn können (S. 11.); so haben wir doch S. 72. a, β die Möglichkeit der Saltation und Desaltation, als einer noch siebenten und achten Rechnungsart gesehen: welche sich aber bis jetzt nur als dergleichen mögliche erweisen, da sich in der ganzen Mathematik noch keine Aufgabe gefunden, wo dergleichen

Rechnungsarten anzuwenden nöthig gewesen wäre; woher es denn auch seyn mag, daß man bis jetzt noch gar nicht daran gedacht hat, ihrer in den mathemat. Lehrbüchern weiter zu erwähnen. — Eine gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den logarithmischen Verhältnissen, Proportionen und Progressionen, welche sich auch als dergleichen mögliche charakterisiren, ohne aber, daß man deren Brauchbarkeit und Nutzen bis jetzt noch in der Mathematik gesehen hätte.

NB. Von den höhern Gleichungen."

Herr Bürja erwähnt dieser noch möglichen siebenten und achten Fundamentalart von Größenmodification zu Ende des sechsten Absch. Th. 1. in seinem Algebristen, ohne solcher aber einen Namen beyzulegen. Wenn er aber sagt, daß sie, — so wie die Gradation wäre: wenn man eine Größe einigemal mit sich selbst multiplizirte — ; im Gegensatz der Gradation also sey: wenn man eine Größe malig zu sich selbst erhöbe; so können wir dieser Definition nicht beitreten. Denn sie gründet sich auf den S. 72. a, β, allgemein bisher als falsch angenommen gerügten Begriff von der Gradation und Degradation, und erschiene nach dem wahren Wesen der Gradation und Degradation (72. a, und a, α) in diesem von Herrn Bürja gegebenen Begriff ihrer, blos als eine Grada-

tion von Gradation und Degradation (76. A, a), mit welcher sie doch keinesweges verwechselt werden kann.

Dagegen erhärtet sich (nach 72. a, β) die Saltation und Desaltation mehr als das, was man zeither unter dem Titel der Gradation debütirt hat.

Ihrem Wesen und Begriff gemäß (l. l.), müssen daher die allgemeinen Ausdrücke $a^{a^{(x)}}$, und $\sqrt[a]{}^{(x)}a$ die Bezeichnung von Saltation und Desaltation seyn, wo denn, x und a, solche für den Ausdruck jeder möglichen Größe gesetzt, ersterer der Exponent, und zweiter die Basis der Saltation und Desaltation heissen.

Die Saltation bestände sonach, in einem stetig fortgesetzten Quadriren (72. d), nach Maaßgabe des gesetzten Exponenten, nachdem man eine Zahl a für das erste Glied, und deren Quadrat für das zweite ihrer Reihe setzte. Sie könnte also nie 1 zu ihrem ersten Gliede haben, weil diese nie (S. 72. a, δ) eine Quadratzahl giebt, sondern stets 1 × 1 ungeändert bleibt: und der Exponent x zeigte hier nicht an, wie vielmal nach einem unveränderlichen stetigen Gesetz jedes Glied in dieser Reihe größer, oder kleiner, als sein nächstvorhergehendes wäre; indem hier jedes Glied der Reihe, als ein erhaltenes Quadrat aus seinem nächstvorherstehenden Gliede, immer wieder ein abgeändertes neues Gesetz für die Erzeugung des

nächstfolgenden Reihegliedes giebt; sondern er zeigte hier nur, die Menge der enthaltenen Produkte, und wie oft in solchen das Gesetz für ihre dargestellte Reihe durch die Glieder selbst geändert worden, daß immer jedes folgende sich als das Quadrat, oder die Quadratbasis zu seinem nächstvorhergehenden verhalte: und hierin läge also der Unterschied dieser noch möglichen, obgleich noch nicht anwendbar gefundenen Rechnungsart, von der Gradation und Degradation.

Müßte aber hier in einer Saltations- oder Desaltationsreihe, von einer Größe a anhebend, also jedes Glied ein Quadrat, oder eine Quadratbasis von seinem nächstvorstehenden geben, so erhielte man also eine dergleichen Reihe in folgenden allgemeinen logarithmischen Ausdrücken (nach 76. A, β). Z. B.

$$a^{a^{(5)}} = a \times a = a^2 \times a^2 = a^4 \times a^4 = a^8 \times a^8 = a^{16} \times \ldots$$

oder nach S. 80. γ:

$$a^{a^{(5)}} = a^{1.2} = a^{2.2} = a^{4.2} = a^{8.2} = a^{16.2} \ldots\ldots\ldots$$

und dagegen wäre nach S. 7. A, γ und S. 80. δ:

$$\sqrt[(5)]{a} = \sqrt{a^{(16)}} = a^{\frac{16}{2}} = a^{\frac{8}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a;$$ so

daß also jedes $\sqrt[(x)]{a}$ leicht gefunden würde, durch ein x maliges Erfinden der Quadratbasis aus a, so oftmalig fortgesetzt, als die in x enthaltene Einheit solches heischte.

b) Besteht (nach S. 72. e) die Möglichkeit der Ausdrücke $(a \dot{\times} b)^m$, und $(a \dot{\times} b)^{\frac{1}{m}}$, daß solche graduirte und degraduirte Verhältnisse geben, — bey denen man also, wie man bey Verhältnissen (nach 65. a) nur auf deren Exponent zu sehen hat, blos hier auf den Logarithmus ihrer Gradation, oder Degradation Rücksicht zu nehmen hätte, — und müssen zusammengesetzte gleiche Verhältnisse auch ihnen (nach S. 66. u. 70.) entsprechende Proportionen und Progressionen wiederum geben; so besteht denn auch die Möglichkeit logarithmischer Proportionen und Progressionen: also benannt, weil man bey ihnen auf den Logarithmus der Gradation der in ihnen bestehenden Glieder vorzüglich sein Augenmerk zu richten hätte.

α) Entsprechend (72. e) gäben denn die allgemeinen Ausdrücke $(a \dot{.\times.} a)^m = (b \dot{.\times.} b)^m$, und $(a \dot{.\times.} a)^{\frac{1}{m}} = (b \dot{.\times.} b)^{\frac{1}{m}}$ logarithmische Proportionen, ersterer, eine dergleichen steigende; und letzterer, eine fallende dieser Art: und wenn so in benannten Zahlen stünde:

$$2 \dot{.\times.} 8 = 4 \dot{.\times.} 64,$$

so hieße dieses: 2 verhält sich logarithmisch zu 8, gleich 4 zu 64, denn die Zahl 64 ist die dritte Gradation von der Zahl 4, wie es die Zahl 8 von der Zahl 2 ist. Die Proportion ist also $= 2 \dot{.\times.} 2^3 = 4 \dot{.\times.} 4^3$: und es verhielte sich also in einer dergleichen log. Proportion, wiederum logarithmisch der erste Satz

zum dritten, gleich den zweeten zum vierten: eben so wie sich in ihr verhalten müßte das Produkt, oder die Mensur der beiden ersten Sätze zum ersten, oder zum zweeten Satz; wie das Produkt, oder die Mensur der beiden letztern Sätze zum dritten, oder zum vierten.

NB. Um dergleichen Proportionen und Progressionen von den gewöhnlichen Verhältniß-Proportionen und Progressionen, als eine besondere Art solcher zu unterscheiden, würden wir also sie auch als solche in ihrer Bezeichnung als spezifisch unterschieden bemarken müssen, daher diese Abänderung ohngefähr für ihre Bezeichnung.

β) Stetig hieße eine dergleichen Proportion (entsprechend 66. a), wenn sie drey Sätze in einer dergleichen Reihefolge enthielte, daß der zweite die ebensovielste Gradation von dem ersten ist, als der dritte vom zweeten. Als:

∴ 3, 9, 81,

denn hier ist $9 = 3^2$, und $81 = 9^2$. Wovon also die allgemeine Formel wäre ∴ a, a^m, a^{m^2}; wo man denn siehet, daß wenn drey Größen, die zur nemlichen Basis gehören, in logarithmischer Proportion stehen, die Exponenten eine zusammenhängende Verhältnißproportion ausmachen. Folglich, wenn man die Tafeln gebrauchen will, findet man den Log. des letzten Satzes, indem man das Quadrat des Log. vom mittlern Satze, durch den Log. des ersten Satzes dimetiirt.

γ) Ließe man (wie in β) eine dergleichen stetige logarithmische Proportion in einer unendlichen Reihe also fortgehen (wie S. 70.), daß jeder folgende Satz immer die nemliche Gradation der vorhergehenden wäre; so erhielte man eine logarithmische Progression. Z. B.

∴ 3, 9, 81, 6561, 43,046721, ...

und der allgemeine Ausdruck einer dergleichen logarithmischen Progression wäre:

∴ $a, a^m, a^{(m^2)}, a^{(m^3)}, a^{(m^4)}$ .....

Man siehet hier, daß, wenn die Sätze lauter Gradationen der nemlichen Basis sind, die Exponenten in Verhältnißprogression fortschreiten. Wenn man also die Tafeln gebrauchen will, so siehet man, daß die Logarithmen der Sätze eine Verhältnißprogression ausmachen müssen.

NB. 1. Auf die allgemeinen Gesetze für Verhältnisse, Proportionen und Progressionen, müssen denn nun, mit Berücksichtigung des ihnen spezifischen als stehenden Gradationen, die Gesetze für die Modificationen dergleichen möglicher logarithmischer Proportionen und Progressionen gebauet seyn, wie wir solche denn nur von Herrn Bürja, in seinem Algebristen Th. I. Hauptst. X. aufgestellt finden. Wohin wir zur weitern Nachsicht den Leser verweisen müssen, da uns der Plan unserer Schrift hier ins weitere Detail einzulassen uns verbietet.

NB. 2. Wohl ist es möglich, daß auch die Anwendbarkeit beider, noch möglich gezeigter Rechnungsarten, besonders letzterer, noch gefunden werden kann.

c) Was noch die NB. unsers S. betrift, so haben wir hier denn am Schluß dieses ersten Bandes nur noch für das Verfahren mit Gleichungen, der Krone alles arithmetischen Verfahrens, welches, nicht nur das der gemeinen Rechenkunde ohnmöglich fallende, sondern auch das nach dieser mögliche, oft ungemein kürzer finden lehrt, anzumerken.

Wenn wir bey Benennung der Gleichungen (wie S. 46, Anm. u. S. 64, g, NB.), nur auf die Beschaffenheit der zu bestimmenden unbekannten Größenausdrücke ausgegebenen bekannten Größen sehen; so heißen Gleichungen, deren Glieder Gradations-Ausdrücke enthalten, höhere Gleichungen. In welcher Rücksicht man denn auch daher Stammgleichungen (46) und Verhältniß-Gleichungen (64), beide, sie mögen nun (nach 64, g, NB.) als reine, oder als gemischte erscheinen, als solche, in denen der höchste Ausdruck der unbekannten Größe (nach 72, a, ε) nur in der ersten Gradation stehet, gemeinschaftlich niedere Gleichungen nennen will.

Wie man nun (S. 76, A, α, u. β, NB.) in dem arithmetischen Verfahren mit Gradationen, die zur Erfindung einer unbekannten Größe gegebene bekannte, so zu stellen hat, daß man sie nach den Graden ihrer Gradationen ordnet, — daß nemlich immer die mit höhern Exponenten, denen von niedern Graden vor, und letztere also erstern nachstehen; so giebt dieses auch

das Gesetz: daß man, wenn durch eine eigentlich genannte Gleichung (45 in fine), — also nach den Regeln der Algebra, — unbekannte Wieviele, aus gegebenen bekannten Wievielen (46) bestimmt werden sollen, und diese gegebene unbekannte Größen-Ausdrücke Gradationen verschiedener Grade in sich schliessen, man solche in der Auflösung (wie l. l.) nach ihren Graden zu stellen, und so immer, die von niedern Exponenten auf die von höhern folgen zu lassen habe.

Von der in der höchsten Gradation stehenden gegebenen unbekannten Größe, die als solche, in dem Gleichungs-Ansatz allen übrigen vorsteht, bekommen denn nun wieder dergleichen Gleichungs-Aufgaben mit höhern Gleichungen, die Benennungen: daß sie nach dem Exponenten, des in ihnen enthaltenen höchsten Gradation-Ausdruckes, Gleichungen vom zweiten, dritten, vierten und nten Grade heißen. Wo denn ersterer wieder (nach S. 72, d u. f) besonders quadratische und kubische Gleichungen genannt werden.

Eine quadratische Gleichung ist also: in welchen keine höhere unbekannte Zahl, als vom zweyten Grade vorkommt, und welche daher, als der höchste Größen-Ausdruck in ihr, — nach ihrem Exponenten nemlich, indem man sich (nach S. 72) in ihr alle übrige Ausdrücke vom Grade 1 vorzustellen hat — allen übrigen gegebenen Zahlen vorstehen muß.

α) Wie die niedern Gleichungen sich nach 64, g, NB., in reine und gemischte unterscheiden; so, in eben der Natur, auch die höhern Gleichungen. Es heißen diese nemlich reine: wenn sie sich so einrichten lassen, daß man in einem Gliede die unbekannte Größe, oder eine von ihren Gradationen ganz allein bekommt. Als:

$$x^m = a, \text{ oder } x^m - a = o.$$

Gemischte dagegen nennt man auch höhere Gleichungen, wenn sie nicht in einem Gliede eine einzige Gradation, sondern verschiedene Ausdrücke von der unbekannten Größe enthalten. Als:

$x^2 = x + 15$; oder; $5x^4 - 8x = 19x + 50$; wo denn, wenn man (nach 64, g, NB.) alle Sätze, welche x enthalten, auf eine Seite bringt, man erhält: $x^2 - x = 15$, und $5x^4 - 8x^2 - 19x = 50$; wo man also verschiedene Gradationen von x im ersten Gliede hat, und die Sätze daher nicht addirt werden können.

NB. Anmerken müssen wir auch hier, (wie S. 64, g, NB.) daß man in der Ausübung gemeiniglich mehr mit letzterer Art von höhern Gleichungen zu thun habe.

β) Die gemischten Gleichungen unterscheiden sich wiederum in vollständige und unvollständige.

Erstere sind, wenn die Gradations-Ausdrücke, in welchen die unbekannte Zahl gegeben ist, von der

höchsten ab, bis zum Ausdruck vom Grade 1, in einer natürlichen Reihefolge abnehmen. Z. B.

$ax^m \pm bx^{m-1} \pm cx^{m-2} \pm dx^{m-3} \pm \text{&c.} \ldots\ldots = \pm q$,

als welches die allgemeine Formel einer vollständigen Gleichung giebt.

Letztere dagegen sind: in welchen diese natürliche Reihefolge von abnehmenden Gradations-Ausdrücken für die unbekannte Größe unterbrochen ist, und also einer, oder mehrere Sätze mangeln. Als:

$$x^5 \pm 3x^3 \pm 7x \pm e = 0.$$

In welchem Fall man auch die fehlenden Glieder mit einem Sternchen andeutet, oder auch die fehlende Gradation an ihrem Ort, aber mit vorstehenden Koeffizienten o setzet: wodurch sie also das Ansehen einer vollständigen Gleichung gewinnt. Als:

$$x^5 \pm bx^4 * * \pm dx \pm e = 0;$$ oder

$$x^5 \pm bx^4 \pm ox^3 \pm ox^2 \pm dx \pm e = 0.$$

γ) Die verschiedenen Werthe von x, welche in der Gleichung enthalten sind, werden die Basen, Stammgrößen (Wurzeln) der Gleichung genannt. Gleichviel ist es daher, ob man sagt: die Werthe der unbekannten Größe in der Gleichung; oder, die Stammgrößen, (Wurzeln) der Gleichung. Der letzte und blos bekannte Satz in der Gleichung, enthält also das Produkt aller Stammgrößen (Wurzeln) der Gleichung: und man kann hier (nach S. 70, b, β)

annehmen, daß jede Gleichung so viele Stammgrößen oder Werthe der unbekannten Größe enthält, als Einheiten im größten Exponenten enthalten sind. Denn da man sich vorstellet, daß die Gleichung das Produkt von soviel einfachen Gleichungen ist, als Einheiten im größten Exponenten enthalten sind, und da jede einfache Gleichung eine Stammgröße ist; so sind in der Gleichung so viele Stammgrößen, als Einheiten im größten Exponenten, oder so viel als die Gleichung Grade hat.

Trift es sich nun, daß die Gleichung, vermöge ihrer Beschaffenheit, in der That nicht so viel Stammgrößen haben kann, als man angenommen hat, so werden die fehlenden imaginair.

Die in der Gleichung stehende bekannte Größen, enthalten also (nach S. 46) den Werth der unbekannten.

δ) Weiter theilt man alle diese angeführte verschiedene Arten von Gleichungen, rücksichts der durch sie zu findenden unbekannten Größen, wieder in bestimmte und unbestimmte; je nachdem sich außer den bekannten Größen nur eine, oder mehrere unbekannte in ihnen befinden.

ε) Das bestimmte Verfahren nun, durch welches man in einer Gleichung, aus den gegebenen bekannten

Größen die Werthe der gesuchten unbekannten erfindet, heißt die Gleichung auflösen, oder auch reduziren, und der Theil der Algebra, welcher besonders dieses behandelt, heißt daher auch vorzüglich die Analysis, oder Auflösungskunde.

8) Wie zu Folge S. 46, Anm. u. S. 64 das Verfahren mit Gleichungen mit im Verhältniß gegebenen Größen, unter Ausnahme des spezifischen der gegebenen Größen-Ausdrücke, auf den allgemeinen Gesetzen (S. 46 bis 48) für Stammgleichungen beruhet; eben so muß denn also auch das Auflösungs-Verfahren in gegebenen höhern Gleichungen, als das mit Größen, die ihren Ursprung wiederum in Verhältniß-Ausdrücken haben, unter Rücksicht des ihnen als Gradations-Ausdrücken spezifisch eigenen, auf die Gesetze beider Gleichungs-Arten, also auf die S. 46 bis 48 u. S. 64 aufgestellten Gesetze, als seine Fundamente gebauet seyn: und es müssen sich also in der Analysis der höhern Gleichungen, als den aus den niedern zusammengesetzten, alle, auch die für die niedere Gleichungen aufgestellte Gesetze, als auch für diese geltend, concentriren, so wie jedes Zusammengesetzte, immer seinen Grund in dem es gebenden einfachen und einfachern haben muß.

Daher denn;

Wenn eine Aufgabe vorgetragen ist, so hat man bey ihrer Aufl. folgende drey wesentliche Stücke zu berücksichtigen: nemlich die Benennung der Größen,

deren Ordnung zu einer Gleichung, und die Reduction.

I) Was das erste zu beobachtende Stück betrift; so benennt man angenommen, wenn man allgemein verfährt, um allen Verwechslungen auszubeugen, die unbekannten Größen mit den Endbuchstaben des Alphabets, mit v, w, x, y, z; die bekannten dagegen mit den ersten Buchstaben dieses, mit a, b, c, e, f u. s. w. Sind sie in benannten Zahlen gegeben, so bleiben diese als solche stehen. Auch drückt man gerne Summen, Differenzen und Anzahlen, durch die ihnen ähnlichen Bezeichnungen, von s, d und n oder z aus.

NB. Bey der Benennung aber muß man sich bemühen, so wenig als möglich unbekannte Ausdrücke zu erhalten, um die Gleichung daraus möglichst bestimmt machen zu können. Daher, um eine Aufgabe möglichst bestimmt zu machen, muß man so viele Gleichungen machen, als unbekannte Größen vorhanden sind, und aus diesen mehrern, dann möglichst eine einige Gleichung bilden. Ein erläuterndes Beyspiel hievon s. Malers Algebra §. 74.

II) Hat man die Größen, bekannte als unbekannte gehörig benannt, so muß man dann über das Verhältniß der bekannten und unbekannten Größen nachdenken, d. i. man muß suchen, wie die Größen aus einander entstehen, und wie sie verändert werden müssen, daß die einen den andern gleich werden, und

daß überhaupt Gleiches herauskomme. Die gefundenen Resultate drückt man nun (nach S. 46) in Form einer Gleichung aus. — Wenn dieses geschehen, so geht man denn

III) zur Reduction, oder Auflösung der Gleichung. Wo man dann zum Hauptaugenmerk haben muß: daß man die unbekannte Größe alleine auf eine Seite bringet, wo alsdann das andere Glied ihren Werth ausdrückt. Daher:

1) Enthalten beide Glieder gleiche Sätze unter einerley Zeichen, so streicht man solche aus. (47. a; 64. a).

2) Die Brüche schafft man (nach 64. g, NB. β) weg.

Man bringt aus einem Glied ins andere alle unbekannte und bekannte Größen, daß man jede in einem Glied alleine hat, nemlich mit veränderten Zeichen (nach 48. a; 64. f); und so, wenn es der Vortheil gestattet, kann man überhaupt alle Zeichen in der Gleichung verändern. (47. b).

4) Man addire auf algebraische Art alle Sätze des Gliedes, welches die unbekannte Größe enthält, so bekommt man ein Produkt, welches aus der unbekannten Größe, oder einer Gradation derselben, und

aus einem bekannten Faktor zusammengesetzt ist. Diesen bekannten Faktor pfleget man allemal den Koeffizienten der unbekannten Größe zu nennen, wenn er auch durch Buchstaben ausgedrückt ist.

5) Man dimetiire nach (64. g, NB.) beide Glieder durch den Koeffizienten der unbekannten Größe; so erhält man einerseits die unbekannte Größe, oder eine von ihren Gradationen ganz alleine.

6) Ist nun die unbekannte Größe zu irgend einer Gradation erhoben, so zieht man beiderseits, weil gleiche Größen zu gleichem Grad erhoben auch wiederum gleich seyn müssen, die Urgrößen vom nemlichen Grade aus: und so hat man denn endlich die unbekannte Größe ganz rein in einem Gliede, und deren Werth in dem andern.

Ex. Man verlangt eine Zahl, deren Hälfte und dritter Theil zusammen genommen 50 ausmachen:

Aufl.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 50$$

(nach N. 2.) $\times 2.3 = 3x + 2x = 300$
(nach N. 4.) add. ist also $= 5x = 300$
dimet. (nach N. 5.) $= 5 = x = 60.$

Ex. Wenn man überhaupt die Summe und Differenz zwoer Größen weiß, wie kann man beide

Größen finden? Es sey die Summe = s, die Differenz = d, die kleinste Größe = x; so ist die größere = x + d, und die Summe von x und x + d also = 2x + d, daher die Aufl.

$$2x + d = s$$

man versetze d . . $2x = s - d$

dimet. nach N. 5. ist also . . $x = \frac{s - d}{2}$

oder auch . . . $x = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$

Ex. Man verlangt eine Zahl von der Beschaffenheit, daß ihre Hälfte mit ihrem Quadrate multiplizirt, gleich 500 gäbe. Nennt man nun hier die unbekannte Zahl = x, so ist ihre Hälfte = $\frac{1}{2}x$, und ihr Quadrat = xx; das Produkt von der Hälfte und dem Quadrat ist also $\frac{1}{2}xxx$, oder $\frac{1}{2}x^3$ oder $\frac{x^3}{2}$. Demnach die Aufl.

$$\frac{x^3}{2} = 500$$

(nach N. 2.) $\times 2 = x^3 = 1000$ (S. 60. β Nota.)

giebt (nach N. 6.) $\sqrt[3]{} = x = 10$.

Ex. Es wird eine solche Zahl verlangt, die, wenn man sie um ihren dritten Theil vergrößert, und hernach die Summe mit dem Kubus der Zahl selbst multiplizirt, das Produkt = 108 sey. — Nehmen wir die unbekannte Zahl an = x, so ist ihr drit-

ter Theil $= \frac{1}{3}x$, und die Zahl um ihren dritten Theil vergrößert, wird $x + \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x$, multiplizirt man nun mit dem Kubus x^3, so bekommt man $\frac{4}{3}x^4$.

Demnach die Auflösung:

$\frac{4}{3}x^4 = 108$

(nach N. 2.) $\times 3 = 4x^4 = 324$

(nach N. 5.) $: 4 = x^4 = 81$

(nach N. 6.) $\sqrt[4]{}$ giebt $x = 3$.

NB. Das spezifische in der Reduction höherer Gleichungen, ist sonach das hier vorkommende graduiren und degraduiren, mit welchem es sich wie (S. 64. g) mit dem Multipliziren und Dimetiiren verhält.

κ) Will man in einer höhern Gleichung die höchste Gradation rein und ohne Koeffizienten haben, so muß man alle Sätze durch ihren Koeffizienten dimetiiren, und dann erhält man

$$x^m + \frac{b}{a}x^{m-1} + \frac{c}{a}x^m + \frac{d}{a}x^{m-3} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots = + \frac{q}{a};$$

oder, weil die Buchstaben unbestimmt sind

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots = + q.$$

Will man noch x^o unter den Gradationen rechnen, so muß man die bekannte Größe q auch ins erste Glied bringen, und dieselbe mit x^o oder 1 (nach 76. A, γ, Nota 1, multipliziren, dann wird die Formel

$x_m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots + qx^o = o$;

oder, weil q unbestimmt, und (nach l.l.) $x^o = 1$ ist

$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots + q = o$.

Also ist die Gleichung annullirt (47, d), und die Gradationen folgen in gehöriger Ordnung. Dies ist die Gestalt, unter welcher man die vollständigen Gleichungen zu betrachten, und zu behandeln pflegt.

λ) Um daher eine höhere Gleichung einzurichten, oder zu ordiniren, daß sie eine regelmäßige Gestalt bekomme, hat man folgende Regeln zu beobachten:

1) Man versetze alle Größen ins erste, oder ins zweite Glied der Gleichung, so daß einerseits nichts als o bleibe.

2) Man dimetiire alle Sätze durch den Koeffizienten der höchsten Gradation von der unbekannten Größe.

3) Man addire auf algebraische Art alle Koeffizienten, die zur nemlichen Gradation der unbekannten Größe gehören. Man sammle allenfalls alles, was blos bekannte Größen in sich begreift.

4) Man schreibe 1, als Koeffizient, wo sonst keiner vorhanden ist.

5) Wenn eine Gradation der unbekannten Größe fehlet, so gebe man ihr o zum Koeffizienten.

6) Endlich gebe man Achtung, daß die Gradationen in gehöriger Ordnung, von der höchsten bis zur Basis, und zur blos bekannten Größe auf einander folgen.

Ex. Es sey diese Gleichung gegeben.

$px^5 - px^4 + qx^2 - rx^2 = x + s - t.$

Wenn man alles auf eine Seite bringet, so entstehet:

$px^5 - px^4 + qx^2 - rx^2 - x - s + t = o.$

Wenn man durch p, als den Koeffizienten der höchsten Gradation x^5 dimetiirt, so hat man

$$x^5 - x^4 + \frac{q}{p}x^2 - \frac{r}{p}x^2 - \frac{1}{p}x - \frac{s}{p} + \frac{t}{p} = o.$$

Wenn man die Koeffizienten zusammen nimmt, so wird

$$x^5 - x^4 + \left(\frac{q-r}{p}\right)x^2 - \frac{1}{p}x + \left(\frac{t-s}{p}\right) = o.$$

Wenn man der Gradation x^4, 1 zum Koeffizienten giebt, und $o \cdot x^3$ einschaltet, so erhält man

$$x^5 - 1 \cdot x^4 \pm o \cdot x^3 + \left(\frac{q-r}{p}\right)x^2 - \frac{1}{p}x + \left(\frac{t-s}{p}\right)$$

$= o$ und also hat die Gleichung, die gehörige Gestalt einer vollständigen Gleichung.

Zusatz. Sind die Koeffizienten benannte Zahlen, so bekommt die Gleichung meistens ein noch einfacheres Ansehen, durch deren Zusammenschwinden in den mit ihnen vorzunehmenden Modificationen. Z. B.

Es sey $5x^3 + 100d - 20x = 2x^4$

so ist . . . $0 = 2x^4 - 5x^3 + 20x - 100d$

oder . . . $0 = x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 10x - 50d$

oder . . . $0 = x^4 - \frac{5}{2}x \pm 0.x^2 + 10x - 50d.$

μ) Oft ist man aber auch noch genöthiget, bey der Auflösung sich durch das Substituiren zu helfen, d. h. den Werth einer Größe in die Stelle einer andern ihr gleichen Größe zu setzen. Als wenn $x = (2y - 3)$ wäre, und man daher nun in der Gleichung einen von diesen beiden sich gleichen Ausdrücken für den andern setzte. Dieser zu substituirende Werth muß aber aus den Umständen der Aufgabe, entweder schon bekannt seyn, oder gefunden werden. Dann muß man mit der substituirten Größe die nemlichen Modificationen vornehmen, welche mit der Größe vorgenommen wurden, für welche sie substituirt werden soll: wodurch denn eine (oft mehrere) unbekannte Größe aus der Gleichung weggeschaft, und endlich die gewöhnliche Reduction möglich wird. Man vergleiche Bürja's Algebristen Th. 1. Hptst. XI. §. 9.

NB. Aus diesen unter c. d. S. bis hieher aufgestellten allgemeinen Gesetzen für die Formirung und Reduzirung von Gleichungen, leiten sich denn nun die Formeln ab, die man für hö-

here, besonders für quadratische und kubische Gleichungen giebt; so wie auch auf diese, als eigentlich nur für bestimmte Gleichungen gesetzte, wiederum das Verfahren mit unbestimmten Gleichungen gebauet ist. Freylich aber müssen wir auch hier nochmals die schon L. d. R. S. 391 gegebene Bemerkung wiederholen: daß zum Theil diese Gesetze für Gleichungen noch nicht die Allgemeinheit haben, die man bey andern arithmetischen Formeln findet. Das meiste was hier gethan worden ist, beruht blos nur noch auf Versuchen; indem noch kein einleuchtender Grundsatz bekannt ist, worauf man die Auflösung der Gleichungen bauen könnte: und es fast scheint, als ob man den rechten Weg zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen noch nicht getroffen habe.

Nach dem Wesen unbestimmter Gleichungen, beruht ihre Auflösung hauptsächlich darauf: daß man aus den gegebenen Gleichungen, die Werthe soviel unbekannter Größen sucht, als Gleichungen gegeben sind. Diese Werthe werden noch unbekannte Größen enthalten, welche man alsdann bestimmen kann, wie man will. Beyspiele hiervon sehe man L. d. R. S. 428 bis 438.

Vorläufige Begriffe, wie in einzelnen Fällen, mit der Formirung und Auflösung von Gleichungen zu verfahren sey, haben wir schon in dem, was wir von der Algebra in unserm L. d. R. vorgetragen haben, dort von S. 394 bis 438 gegeben: und Anfängern, besonders solchen, die sich selbst helfen wollen, glauben wir neben Bürja's Selbstlernenden Algebristen, noch besonders die von Wucherer, Karlsruhe 1796 herausgegebene Malersche Algebra empfehlen zu können.

Auf die Algebra gründen sich in der gemeinen Rechenkunde, die Rechnungen der Regulæ Falsi und Cœci, welcher man

sich sonst, vor Einführuug der Algebra, zur Auflösung dergleichen Aufgaben zu bedienen pflegte. Eben so auch die so genannte Alligations-Rechnung. L. d. R. S. 438 bis 446.

Ende des ersten Bandes.

Mitau 1803.

Gedruckt bey J. F Steffenhagen und Sohn.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Druckfehler.

Pag.	Zeile	
13	2	Phänomene, lies Phänomen.
70	20	Keinvievieles, l. Keinwievieles.
74		zuletzt, lese man statt Kapiteln, Abschnitten.
76	1	zwölfte Wiederholung, l. nte Wiederholung.
80		zuletzt und zu Anfang Pag. 81 muß gelesen werden: „und es ist sonach jede ganze Zahl n, auch nmal „so groß als 1, d. i. n = n mal 1; oder, jede „ganze Zahl n, ist so groß als 1 mal n, d. i. n „= 1 mal n.
84	2	ein 12faches von c, l. ein nfaches von c.
—	4	ein 11mal genommenes, l. ein nmal genommenes.

Pag.	Zeile	
84	9	die 12malige Wiederholung, l. die nmalige Wiederholung.
88	17	Eben so, wie dagegen, l. Eben so, wenn dagegen.
—	21	imgleichen, l. ingleichen.
92	4	stehet ein ✣ x zuviel.
96	2	und a (a ✣ p) l. und (a ✣ p)
97	21	das Maaß b, ließ das Maaß a.
109	22	Also ist A ⊾ C, l. Also ist A ≺ C.
130	14	um welche, l. um welchen.
—	23	daß Subtrahiren, l. das Subtrahiren.
—	24	daß von e abziehen soviel sey, l. daß f von e abziehen.
168	1	daß mc ⊾ b, l. daß mc ≺ b.
180	2	das in dem Ausdruck, l. daß in dem.
186	26	= 2 . (a ✣ b) l. = 2 (a ✣ b)
187	1	= n, (a ✣ b) l. = n (a ✣ b)
—	13	= a — b ⋈ n, l. = (a — b) ⋈ n.
193	19	daß nun so, l. das nun so.
194	6	a . n = b . n, l. a . m = b . n;
196	18	würkliche Maaß dieses, l. dieser;
—	28	Ernennung, l. Benennung,
199	23	Dann, l. denn
204	9	(a ✣ b) : n = a : n ✣ b . n, l. (a ✣ b) : n = a : n ✣ b : n;
205	19	anwiesen, l. erwiesen,
206	16	oder dieses, l. oder dieser,
208	21	und denn, l. und dann,

Pag.	Zeile	
210	18	verführt, l. verführte,
212	11	fehlt zwischen 13 c und 33 NB. noch einzusetzen,
		24, c;
215	21	wie der, l. wieder,
229	5	a : n = (b : r. S. u. f.; l. a : n = b : r (S. u. f.
230	11	(nach S. 60. e) l. (nach S. 60. i)
246	21	daß in graden Zahlen, l. das u. s. w.
287	3	wenn a $\prec$ b, l. wenn a $\succ$ b;
295	5	Not. 1. l. Not. 2.
298	18	daß so, l. das so
303	13	S. 70. b, c; l. S. 70. b, ε
307	26	nie Ausdrücke a^2, l. die u. s.
308	21	Wie man nun jede Zahl, l. e) Wie man nun u. s.
310	18	a $\dot{\times}$ d = n, l. c $\dot{\times}$ d = n,
311	11	Als Resultat ergiebt sich denn, l. g) Als Resultat u. s.
—	22	ae^{n-r}, l. ae^{n-1},
312	7	fehlen die Citata: (nach S. 70. b, ε und 72. a, ε und 72 a, α)
313	8	daß sie ihren Gliedern, l. daß sie in ihren Gliedern,
317	6	mit dem Ausdruck hat, l. mit dem erstern Ausdruck hat,
319	12	(75. f) l. (73. f)
323	27	$x = 1 . x$; l. $x^1 = 1 . x$
327	1	oder, l. und
329	29	mit Null markirt, und, l. um

Pag.	Zeile	
334	18	Basis wiederum, l. Basis selbst wiederum
339	16	Basiszahl, l. Basiszahl habe,
349	13	$\sqrt[n]{a^6} =$ l. $\sqrt[2]{a^6} =$
350	9	$\sqrt{a^m}$ l. $\sqrt[n]{a^m}$
352	20	mit $\sqrt{a^3}$ und $\sqrt{x^4}$, l. $\sqrt[6]{a^3}$ und $\sqrt[6]{x^4}$,
356	3	sein Produkt, l. kein Produkt
359	18	Größe x^{-1}, l. Größe x^{-n},
360	21	und daher noch solcher, l. und daher nach solcher,
363	8	$= 1000000$ l. $\overset{6}{=} 1000000$
365	16	Z. B. 6;482 : 2;13, l. Z. B 6;428 : 2;13
—		in der letzten Zeile muß man statt 683 lesen 685
369	19	des Logarithmus, l. oder Logarithmus
370	27	gan, l. ganz,
371	7	des x, l. das x
—	14	die Bezeichnung des Logarithmen, l. der Logarithmen,
373	15	auf die Bestimmung, l. auf der
377	6	welcher zwischen 10^n, l. welche
384	2	$p = +^{m+\frac{1}{2}}$ l. $p = x^{m+\frac{1}{2}}$ $p = +^{m+\frac{1}{2}}$ l. $p = x^{m+\frac{1}{2}}$
—	12	von 1 bis $Q^{M+\frac{1}{4}}$; l. von 1 bis Q, $m+\frac{1}{4}$;
—	14	von Q. M $+\frac{3}{4}$ aber, l. von Q; M $+\frac{3}{4}$ aber,
389	8	man dürfe, l. man dürfte,
390 und 391		muß man für q allemal lesen 9
393	3 u. 4	xp l. x^p
394	11	2784, l. 4784,
395	25	l. 3578 = 5536403, l. = 3;5536403

Pag. Zeile

421 19 — 1;2709352, l. — 1;2708352

424 21 angenommen a b, l. angenommen a ⊥ b,

427 23 so ist $x = \sqrt{a}$, l. so ist $x = \sqrt[m]{a}$,

428 16 l. $\sqrt{16} = \frac{1}{n}$ l. 16, l. l. $\sqrt{16} = \frac{1}{2}$ l. 16,

431 4 $\div$ 2l. 3469, l. $\div$ 2l. 5499 =

— 13 $x = \frac{\text{l. } 8191}{\text{l. } 2}$, l. $x = \frac{\text{l. } 8192}{\text{l. } 2}$

435 20 nach S. 7. A, γ, l. nach S. 76. A, γ.

439 11 ausgegebenen, l. aus gegebenen.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Limmer, Karl August,

Metaphysik der Größenkunde

Königsberg 1803

Math.u. 108
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594089-1